微分積分学第一・演習 (2024 2Q G)

[集合]

例題. (極座標) $\mathbb{R}_{>0} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$, $I = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 2\pi\}$ とし,

$$P = \{(r\cos\theta, r\sin\theta) \in \mathbb{R}^2 \mid (r,\theta) \in \mathbb{R}_{>0} \times I\}$$

とおく. $P = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ を示せ.

解答例. 部分集合であることや集合が等しいことの定義は

$$\begin{aligned} A \subset B &\iff a \in A \text{ ならば } a \in B \text{ が成立}, \\ A = B &\iff A \subset B \text{ かつ } B \subset A \end{aligned}$$

なのでこれを示します.

(1) $P \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ であること.

P はその取り方から $\mathbb{R}^2$ の部分集合です. そこで任意の $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta) \in P$ が $(x,y) \neq (0,0)$ であることを示します. もし $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta) = (0,0)$ とすると $r\cos\theta = 0$ かつ $r\sin\theta = 0$ をみたします. ところが $r \in \mathbb{R}_{>0}$ なので $r \neq 0$ より $\cos\theta = 0$ かつ $\sin\theta = 0$ となります. いま $0 \leq \theta < 2\pi$ なので $\sin\theta = 0$ より $\theta = 0$ または $\theta = \pi$ となります. このとき $\cos\theta = \pm 1$ なので矛盾します. したがって $(x,y) \in P$ は $(x,y) \neq (0,0)$ をみたし

$$P \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

となります.

(2) $P \supset \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ であること.

$(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ とします. $r = \sqrt{x^2+y^2}$ とおくと $(x,y) \neq (0,0)$ なので $x^2+y^2 > 0$ より $r > 0$ をみたします. したがって $r \in \mathbb{R}_{>0}$ です. また点 $A = (x,y)$ に対してベクトル $\overrightarrow{OA}$ の x 軸正の向きから正の向きに測った角度を θ とおくと $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ をみたします. したがって $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ で $r > 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$ をみたすので $(x,y) \in P$ となります. よって

$$P \supset \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

となります.

以上より $P \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ かつ $P \supset \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ですので

$$P = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

です.

C1*. (集合) $A = \{1,2,3\}$ とする. 次の集合を求めよ (答のみでよい).

(1) $\{(a,b,c) \in A^3 \mid a = b = 1\}$　　(2) $\{(a,b,c) \in A^3 \mid a = b = c\}$

(3) $\{(a,b,c) \in A^3 \mid a \leq b < c\}$　　(4) $\{(a,b,c) \in A^3 \mid a < b < c < 3\}$

(5) $\{(a,b,c) \in A^3 \mid a \neq b \neq c\}$

C2*. (集合) 次の集合を平面上に図示せよ.

(1) $A = (0,1] \times \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

(2) $B = \{(r\cos\theta, r\sin\theta) \mid (r,\theta) \in A\}$.

C3*. (像と逆像) $f(x) = x^2$ とする. $\mathbb{R}$ の部分集合 A, B を $A = [0,2]$, $B = [-4,4]$ とおく.

(1) 集合 $A' = \{f(x) \mid x \in A\}$ と集合 $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in A'\}$ を求めよ.

(2) 集合 $B' = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in B\}$ と集合 $\{f(x) \in \mathbb{R} \mid x \in B'\}$ を求めよ.

[写像]

例題. (全単射) $f(x)=\sin x$ とする．原点と正の数を含む区間 I と $\mathbb{R}$ の区間 J で $f\colon I\to J$ が全単射となるような最も長い I を求めよ．

解答例. $I=\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ が条件をみたすことを示します．このとき J は $J=[-1,1]$ となります．

(1) 全射性について．任意の $y\in J=[-1,1]$ に対して $x=\sqrt{1-y^2}$ と取ります．このとき $x^2+y^2=1$ をみたすので点 $P=(x,y)$ は原点を中心とする半径 1 の円周上にあります．x 軸正の向きから，原点から点 P に向かう向きへのなす角を θ とすると $\sin\theta=y$ をみたします．したがって

$$\text{任意の } y\in J \text{ に対して } f(x)=y \text{ をみたす } x(=\theta) \text{ が存在する}$$

ので $f(x)$ は I 上全射です．

(2) 単射性について．$x,x'\in I$ とし $f(x)=f(x')$ が成り立つと仮定します．すると $\sin x-\sin x'=0$ なので

$$\sin x-\sin x'=2\cos\frac{x+x'}{2}\sin\frac{x-x'}{2}=0$$

となります．いま $-\dfrac{\pi}{2}\le x,x'\le\dfrac{\pi}{2}$ なので $-\dfrac{\pi}{2}\le\dfrac{x\pm x'}{2}\le\dfrac{\pi}{2}$ ですから

$$\frac{x+x'}{2}=\pm\frac{\pi}{2} \text{ または } \frac{x-x'}{2}=0$$

となります．ここで $x+x'=\pm\pi$ となるのは $x=x'=\pm\dfrac{\pi}{2}$ のときなので結局 $x=x'$ がわかります．したがって

$$f(x)=f(x') \text{ ならば } x=x'$$

が成立するので $f(x)$ は I 上単射です．

(3) 最大であること．$|x|>\dfrac{\pi}{2}$ とすると $\sin x=-\sin(x\pm\pi)$ なのである $x'\in I$ で $\sin x=\sin x'$ となります．したがって I より大きな範囲では単射でないことがわかります．

C4*. (写像) 次の対応は定義されるか．定義されているとき全射か，単射かどうかを調べよ．

(1) $f\colon[0,2\pi]\to[0,1]$, $f_1(x)=\sin x$.
(2) $g\colon[0,2\pi]\to[-1,1]$, $f_2(x)=\sin x$.
(3) $h\colon[0,\frac{\pi}{2}]\to[-1,1]$, $f_3(x)=\sin x$.

C5*. (全射，単射) 次の関数が単射となるか，全射となるかを調べよ．

(1) $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を $f(x)=x^2$ と定める．
(2) $g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}_{\ge0}=\{x\in\mathbb{R}\mid x\ge0\}$ を $g(x)=x^2$ と定める．
(3) $h\colon(0,1]\to(0,1]$ を $h(x)=x^2$ と定める．

C6. (全射，単射) $A=\{a_1,\dots,a_n\}$, $B=\{b_1,\dots,b_m\}$ を有限集合とし，$f\colon A\to B$ を写像とする．このとき次を示せ．

(1) f が単射ならば $n\le m$.
(2) f が全射ならば $n\ge m$.

C7*. (全単射) A, B を集合とし，$f\colon A\to B$, $g\colon B\to A$ を写像とする．また $\mathrm{id}_A\colon A\to A$, $\mathrm{id}_B\colon B\to B$ はそれぞれ A, B の恒等写像 (id_A は全ての $a\in A$ に対して $\mathrm{id}_A(a)=a$ をみたす写像) とする．次を示せ．

(1) $g\circ f=\mathrm{id}_A$ のとき f は単射で，g は全射．
(2) $g\circ f=\mathrm{id}_A$ かつ $f\circ g=\mathrm{id}_B$ のとき f は全単射．

[初等関数]

例題. (逆三角関数) $|x| \leq 1$ に対して $\cos\left(\sin^{-1} x\right)$ を計算せよ.

解答例. $\theta = \sin^{-1} x$ とおきます．このとき逆三角関数の定義から $\sin\theta = x$ をみたします．さらに**逆三角関数は必ず主値をとる**ので $-\dfrac{\pi}{2} \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$ をみたします．したがって $\cos\theta \geq 0$ です．いま $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ なので

$$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta = 1 - x^2$$

であり，$\cos\theta \geq 0$ であることから

$$\cos\left(\sin^{-1} x\right) = \cos\theta = \sqrt{1 - x^2}$$

となります.

このような三角関数と逆三角関数を含む式 ($\sin(\tan^{-1} x)$ など) は，計算できる場合は最後まで計算しましょう.

C8. (双曲線関数) $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x}$ を<u>**双曲線関数**</u>という．次のような倍角・半角の公式を示せ.

(1) $\cosh(2x) = 2\cosh^2 x - 1 = 2\sinh^2 x + 1 = \cosh^2 x + \sinh^2 x$.

(2) $\sinh(2x) = 2\sinh x \cosh x$.

(3) $\cosh^2 \dfrac{x}{2} = \dfrac{\cosh x + 1}{2}$.

(4) $\sinh^2 \dfrac{x}{2} = \dfrac{\cosh x - 1}{2}$.

C9*. (双曲線関数) $f(x) = \dfrac{\sinh x}{\cosh x}$ とする.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)$ を求めよ.

(2) $|x| < 1$ に対して $\tanh^{-1} x$ を対数関数を用いて表せ.

C10*. (逆三角関数) 次を計算せよ.

(1) $\tan^{-1}\dfrac{1}{2} + \tan^{-1}\dfrac{1}{3}$.

(2) $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x$ ($|x| \leq 1$).

(3) $\tan^{-1} x + \tan^{-1}\dfrac{1}{x}$ ($x \in \mathbb{R}$).

(4) $\sin^{-1}(\sin x)$ ($0 \leq x \leq \pi$).

C11. (逆三角関数) 次を有理関数で表せ.

(1) $\sin\left(2\tan^{-1} x\right)$.

(2) $\cos\left(2\tan^{-1} x\right)$.

C12. (逆双曲線関数) 次の等式が成立することを示せ.

(1) $\sinh^{-1} x = \log\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$.

(2) $\cosh^{-1} x = \log\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$, (ただし $x \geq 1$).

[微分法]
例題. (導関数) 関数 $f(x) = \sin^{-1} x$ $(|x| < 1)$ の導関数を求めよ.

解答例. $y = \sin^{-1} x$ とおきます. $|x| < 1$ より $-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$ であり, $x = \sin y$ は $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ 上で狭義単調増加で $\dfrac{dx}{dy} = \cos y \neq 0$ です. したがって逆関数 $y = \sin^{-1} x$ は $-1 < x < 1$ で微分可能で

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\cos y}$$

です. ここで $-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$ なので $\cos y > 0$ であり $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$ となります. したがって

$$f'(x) = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

です.

C13*. (良く知られた導関数) 次の導関数を書け. ただし α は実数とする (答のみで良い).
(1) x^α. (2) e^x. (3) $\log |x|$.

C14*. (双曲線関数の導関数) 次の関数の導関数を求めよ.
(1) $\sinh x$. (2) $\cosh x$. (3) $\tanh x$. (4) $\sinh^{-1} x$.

C15*. (導関数) 次の関数の導関数を (公式を用いて) 求めよ. ただし $a > 0$ とする.
(1) $\log \left|\tan \dfrac{x}{2}\right|$. (2) $\dfrac{1}{a} \tan^{-1} \dfrac{x}{a}$.

C16. (対数微分法) $f(x) = x^x$ $(x > 0)$ とする.
(1) $g(x) = \log |f(x)|$ の導関数 $g'(x)$ を求めよ.
(2) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ.

C17. (高階導関数) $f(x) = \sin x$ の n 階導関数は

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n}{2}\pi\right)$$

と表されることを示せ.

C18*. (高階導関数) $n \geq 1$ に対して次の関数の n 階導関数を場合分けをせずに表せ.
(1) $\log(1 - x^2)$. (2) $x^2 \sin x$.

C19. (不等式) $\lambda > 0$ とする.
(1) $0 < x \leq 1$ のとき $\log x + \dfrac{2}{\lambda x^{\lambda/2}} > 0$ であることを示せ.
(2) $\displaystyle\lim_{x \to +0} x^\lambda \log x = 0$ を示せ.

[原始関数の計算]

例題. (部分分数分解) $\dfrac{4}{(x-1)^3(x^2+1)}$ を部分分数分解せよ.

解答例. $f(x)=(x-1)^3=x^3-3x^2+3x-1$, $g(x)=x^2+1$ と展開します．$f(x)$ を $g(x)$ で割ると $f(x)=(x-3)(x^2+1)+2x+2=(x-3)g(x)+2x+2$ となります．次に $g(x)$ をこの余り $r(x)=2x+2$ で割ると $g(x)=\dfrac{x-1}{2}(2x+2)+2=\dfrac{x-1}{2}r(x)+2$ なので

$$\begin{aligned} 2 &= g(x)-\frac{x-1}{2}r(x)=g(x)-\frac{x-1}{2}(f(x)-(x-3)g(x)) \\ &= \frac{x^2-4x+5}{2}g(x)-\frac{x-1}{2}f(x) \end{aligned}$$

です．したがって両辺を $f(x)g(x)$ で割って $\dfrac{4}{(x-1)^3(x^2+1)}=\dfrac{x^2-4x+5}{(x-1)^3}-\dfrac{x-1}{x^2+1}$ となります.

また $\dfrac{a_1}{x-1}+\dfrac{a_2}{(x-1)^2}+\dfrac{a_3}{(x-1)^3}=\dfrac{a_1(x-1)^2+a_2(x-1)+a_3}{(x-1)^3}$ です．x^2-4x+5 を $x-1$ で割った余りは 2 なので $a_3=2$ です．このとき $x^2-4x+5-2=(x-1)(x-3)$ であり，$a_1(x-1)+a_2=x-3$ を $x-1$ で割った余りが -2 なので $a_2=-2$ です．したがって $a_1=1$ です．これより

$$\frac{4}{(x-1)^3(x^2+1)}=\frac{1}{x-1}-\frac{2}{(x-1)^2}+\frac{2}{(x-1)^3}-\frac{x-1}{x^2+1}$$

と部分分数分解できます.

C20*. (原始関数) 次の関数を積分せよ．(4) は部分積分を行うこと.

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}$.　(2) x^2e^{-x}.　(3) $\dfrac{\log|x|}{x}$.　(4) $\sin^{-1}x$.

C21*. (有理関数の原始関数) $f(x)=\dfrac{2}{(x+1)(x^2+1)}$ とする.

(1) $f(x)$ を部分分数分解せよ.

(2) $\displaystyle\int f(x)\,dx$ を求めよ.

C22*. (有理関数の原始関数) 次の関数の原始関数を求めよ.

(1) $\dfrac{2x+1}{x(x+1)^2}$.　(2) $\dfrac{3x^2+1}{x^3+x-1}$.　(3) $\dfrac{1}{(x^2+1)^2}$.

C23. (積分等式) $f(x), g(x)$ は 2 回微分可能で $f''(x)=af(x)$, $g''(x)=bg(x)$ (a,b は定数) をみたすとする．このとき

$$(a-b)\int f(x)g(x)\,dx=f'(x)g(x)-f(x)g'(x)+C$$

であることを示せ (C は積分定数).

C24. (原始関数の追加分) 次の関数の原始関数を求めよ.

(1) $e^{ax}\sin bx$.　(2) $e^{ax}\cos bx$.　(3) $(\sinh ax)\sin bx$.

[三角関数と無理関数の原始関数]

例題. (三角関数の原始関数) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x}\,dx$ を計算せよ.

解答例. $t = \tan\dfrac{x}{2}$ とおくと $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{2}{1+t^2}$ なので

$$\int \frac{1}{\sin x}\,dx = \int \frac{1}{\sin x}\frac{dx}{dt}dt = \int \frac{1+t^2}{2t}\frac{2}{1+t^2}\,dt = \int \frac{1}{t}\,dt = \log|t| + C = \log\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C$$

となります. 一方

$$\int \frac{1}{\sin x}\,dx = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x}\,dx = \int \frac{\sin x}{1-\cos^2 x}\,dx$$

であり, $t = \cos x$ とおくと $\dfrac{dt}{dx} = -\sin x$ なので

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sin x}\,dx &= \int \frac{-1}{1-t^2}\,dt = \int -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right) = \frac{1}{2}(\log|1-t| - \log|1+t|) + C\\ &= \frac{1}{2}(\log|1-\cos x| - \log|1+\cos x|) + C = \frac{1}{2}\log\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right| + C\end{aligned}$$

となります.

このように原始関数は見た目に異なることがあります.

C25. (無理関数の原始関数) $a < b$ とし, $I = \displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\,dx$ とする.

(1) $t = \sqrt{\dfrac{x-a}{b-x}}$ と変数変換し, $I = 2\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{x-a}{b-x}} + C_1$ となることを示せ.

(2) $\sqrt{(x-a)(b-x)} = \sqrt{\left(\dfrac{b-a}{2}\right)^2 - \left(x - \dfrac{a+b}{2}\right)^2}$ を用いて

$I = \sin^{-1}\dfrac{2x-(a+b)}{b-a} + C_2$ となることを示せ.

(3) $C_2 - C_1$ はいくつか.

C26*. (三角関数の原始関数) $I = \displaystyle\int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}\,dx$, $J = \displaystyle\int \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}\,dx$ とする.

(1) $I + J$ を求めよ.

(2) $I - J$ を求めよ.

(3) I, J を求めよ.

C27*. (三角関数の有理式の原始関数) a, b は定数とする. 次の関数を積分せよ.

(1) $\dfrac{1}{\sin^2 x - 2\cos x}$. (2) $\dfrac{1}{a+\tan x}$. (3) $\dfrac{1}{a\cos^2 x + b\sin^2 x}$ $(a > 0, b \neq 0)$.

C28*. (無理関数の原始関数) 次の関数を積分せよ.

(1) $\dfrac{1}{x\sqrt{x^2+1}}$. (2) $\dfrac{1}{x^2\sqrt{2-x^2}}$. (3) $\dfrac{\sqrt{x+1}}{x}$.

C29. (その他応用) 次の関数を積分せよ.

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}$. (2) $\dfrac{\log|x|}{\sqrt{1+x}}$. (3) $\dfrac{1}{x(1+(\log x)^2)}$.

[広義積分]

例題. (広義積分) 広義積分 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$ が収束する p の範囲とそのときの積分値を求めよ.

解答例. $a > 1$ として定積分 $\displaystyle\int_1^a \frac{1}{x^p}\,dx$ を求めて $a \to \infty$ の極限を調べます.

$p \neq 1$ のとき

$$\int_1^a \frac{1}{x^p}\,dx = \left[-\frac{1}{(p-1)x^{p-1}}\right]_1^a = -\frac{1}{(p-1)a^{p-1}} + \frac{1}{p-1}$$

です. よって $a \to \infty$ のとき, $p > 1$ なら $\dfrac{1}{p-1}$ に収束し, $p < 1$ のとき ∞ に発散します. $p = 1$ なら $\displaystyle\int_1^a \frac{1}{x}\,dx = \log a$ ですから

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \lim_{a\to\infty}\int_1^a \frac{1}{x}\,dx = \lim_{a\to\infty}\log a = \infty$$

と発散します. したがって $p > 1$ のとき収束し, 積分値は $\dfrac{1}{p-1}$ です.

また $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx$ は $0 < a < 1$ として $\displaystyle\int_a^1 \frac{1}{x^p}\,dx = \int_1^{1/a} \frac{1}{t^{2-p}}\,dt$ なので $p < 1$ のとき $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx$ は収束し, 積分値は $\dfrac{1}{1-p}$ となります.

C30*. (広義積分) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2(1+x^2)}\,dx$ を求めよ.

C31*. (広義積分) 次の広義積分を求めよ. ただし $n = 0, 1, 2, \ldots$ とする.

(1) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\,dx.$ (2) $\displaystyle\int_0^1 (\log x)^n\,dx.$ (3) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{e^x + e^{-x}}\,dx.$

C32*. (広義積分の収束・発散) 次の積分の収束・発散を調べよ.

(1) $\displaystyle\int_{-1}^2 \frac{1}{x}\,dx.$ (2) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x}{1+x^2}\,dx.$ (3) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\log(1+x)}{x}\,dx.$

C33. (ガンマ関数) $\Gamma(s) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}\,dx$ $(s > 0)$ とする.

(1) $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ を示せ. (2) 自然数 n に対して $\Gamma(n)$ を求めよ.

C34. (ベータ関数) $B(p,q) = \displaystyle\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$ $(p, q > 0)$ とする. 次を示せ.

(1) $B(p, q+1) = \dfrac{q}{p}B(p+1, q).$ (2) $B(p,q) = \dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$, $(p, q \in \mathbb{N}).$

(3) $B(p,q) = 2\displaystyle\int_0^{\pi/2} (\sin\theta)^{2p-1}(\cos\theta)^{2q-1}\,d\theta.$ (4) $B(p,q) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}}\,dx.$

C35. (正規分布) $\sigma > 0$ とし $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$ とする. ここで $\exp(x) = e^x$ である. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \exp(-x^2)\,dx = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ であることを用いて次を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx.$ (2) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty xf(x)\,dx.$ (3) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty (x-m)^2 f(x)\,dx.$

[多変数関数の連続性]

例題. (関数の極限) 関数 $f(x,y) = \dfrac{xy}{|x|+|y|}$ は原点で極限値を持つかどうか調べよ.

多変数関数の極限では点 (x,y) を原点に近づけるときの近づけ方は無数に存在しますので，どのように近づけても極限値が存在することを示します．そこで極座標を用いて $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ とおいて $r \to 0$ のとき θ によらずに極限が存在することを示します.

解答例. $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ $(r > 0)$ とおくと

$$|f(x,y)| = \left|\frac{xy}{|x|+|y|}\right| = \frac{r^2|\cos\theta\sin\theta|}{r(|\cos\theta|+|\sin\theta|)}$$

です．ここで $(|\cos\theta|+|\sin\theta|)^2 = 1+2|\cos\theta||\sin\theta| \geq 1$ より $|\cos\theta|+|\sin\theta| \geq 1$ です．したがって

$$0 \leq \left|\frac{xy}{|x|+|y|}\right| = r\frac{|\cos\theta\sin\theta|}{|\cos\theta|+|\sin\theta|} \leq r|\cos\theta||\sin\theta| \leq r$$

をみたします．よって $r \to 0$ のとき θ によらずに $f(x,y) \to 0$ となりますから極限が存在して，極限値は 0 です.

極限の近づけ方によって極限値が異なる場合は，極限は存在しません.

今の場合，相加相乗平均の不等式から $\dfrac{|x|+|y|}{2} \geq \sqrt{|x||y|}$ です．よって $|x||y| \leq \dfrac{(|x|+|y|)^2}{4}$ なので

$$0 \leq |f(x,y)| = \frac{|xy|}{|x|+|y|} \leq \frac{|x|+|y|}{4} \to 0 \quad ((x,y) \to (0,0))$$

と示すこともできます.

C36*. (関数の極限) $(x,y) \neq (0,0)$ に対して $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ とする.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right)$, $\displaystyle\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right)$ を求めよ.

(2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ は存在しないことを示せ.

C37*. (多変数関数の極限) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2+1)(y^2+1)-1}{x^2+y^2}$ を求めよ.

C38*. (関数の極限) 平面上の次の関数 $f(x,y)$ の原点での極限値があれば求めよ.
(極限が存在するときは $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ とおいて $r \to 0$ として極限値が求められる．極限が存在しないことを示すときは，近づき方によって極限値が変わることを言う)

(1) $\dfrac{x^3+2y^3}{x^2+y^2}$.　(2) $\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.　(3) $\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$.

C39. (関数の連続性) 平面上の次の関数 $f(x,y)$ が $\mathbb{R}^2$ 上で連続かどうか調べよ.

(1) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{y(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

(2) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{y\sin\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

[多変数関数の導関数]

例題. (偏導関数) $f(x,y)=\log(x^2+y^2)$ とする．$f(x,y)$ の偏導関数を全て求めよ．

解答例. $z=f(x,y)$ の x 方向偏導関数は，y を固定して，変数 x のみの関数とみて x で微分します．$g(t)=\log t$, $t=h(x)=x^2+y^2$ (y は定数) とみて $z=g(h(x))$ と表されるので

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{dz}{dt}\frac{\partial t}{\partial x}=\frac{1}{t}(2x)=\frac{2x}{x^2+y^2}$$

となります．同様に $z=f(x,y)$ の y 方向偏導関数は，x を定数とみて y で微分して

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\log(x^2+y^2)=\frac{1}{x^2+y^2}\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2)=\frac{2y}{x^2+y^2}$$

となります．

C40*. (偏微分) 次の関数の各変数についての偏導関数を求めよ．

(1) $f(x,y)=e^{xy}$.
(2) $f(x,y)=\log_x y$, $(x>0, x\neq 1, y>0)$.
(3) $f(x,y)=\tan^{-1}\dfrac{y}{x}$, $(x\neq 0)$.

C41*. (2 階偏微分) 次の関数の 2 階偏導関数を全て求めよ．

(1) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$, $((x,y)\neq(0,0))$.
(2) $f(x,y)=\tan^{-1}\dfrac{y}{x}$, $(x\neq 0)$.

C42*. (2 階偏微分) 次の関数 w について $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}$ を求めよ．

(1) $w=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $((x,y,z)\neq(0,0,0))$.
(2) $w=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $((x,y,z)\neq(0,0,0))$.

C43*. (2 階偏微分) 変数 (x,y) 及び (r,θ) (ただし $r>0$) は関係式 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ をみたすとする．$(x,y)\neq(0,0)$ のとき $\left(\dfrac{\partial r}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial r}{\partial y}\right)^2$ を求めよ．

C44. (偏微分の交換) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ とおく．

(1) $f(x,y)$ は $(0,0)$ で連続であることを示せ．
(2) 偏微分係数 $f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$ を求めよ．
(3) 偏導関数 $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ $((x,y)\neq(0,0))$ を求めよ．
(4) 2 階偏微分係数 $f_{xy}(0,0)$, $f_{yx}(0,0)$ を求めよ．

C45. (ベクトル値関数の回転) $f(x,y,z)$, $A_i(x,y,z)$ $(i=1,2,3)$ を $\mathbb{R}^3$ 上の C^2 級関数，$\boldsymbol{A}(x,y,z)=\begin{pmatrix}A_1(x,y,z)\\A_2(x,y,z)\\A_3(x,y,z)\end{pmatrix}$ をベクトル値関数とする．次を示せ．ただし $\triangle\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\triangle A_1\\\triangle A_2\\\triangle A_3\end{pmatrix}$.

(1) $\mathrm{rot}\,(\mathrm{grad}\,f)=\boldsymbol{o}$.
(2) $\mathrm{div}\,(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A})=0$.
(3) $\mathrm{rot}\,(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A})=\mathrm{grad}\,(\mathrm{div}\,\boldsymbol{A})-\triangle\boldsymbol{A}$.

[連鎖公式]

例題. (連鎖公式) $f(x, y)$ は C^2 級とし，$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ とする．$z = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ に対して $z_{r\theta}$ を求めよ．

解答例. $f(x, y)$ は x, y を変数とする 2 変数関数であり，$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ との合成関数を z とします．z を r で偏微分すると，連鎖公式より

$$z_r = \frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = f_x(r\cos\theta, r\sin\theta)\cos\theta + f_y(r\cos\theta, r\sin\theta)\sin\theta$$

となります．これをさらに θ で偏微分すると，ライプニッツの公式より

$$\begin{aligned}\frac{\partial z_r}{\partial\theta} &= \frac{\partial f_x}{\partial\theta}\cos\theta + f_x\frac{\partial\cos\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial f_y}{\partial\theta}\sin\theta + f_y\frac{\partial\sin\theta}{\partial\theta}\\ &= \frac{\partial f_x}{\partial\theta}\cos\theta - f_x(x, y)\sin\theta + \frac{\partial f_y}{\partial\theta}\sin\theta + f_y(x, y)\cos\theta\end{aligned}$$

です．さらに連鎖公式より

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_x}{\partial\theta} &= \frac{\partial f_x}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\theta} + \frac{\partial f_x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\theta} = f_{xx}(x, y)(-r\sin\theta) + f_{xy}(x, y)(r\cos\theta),\\ \frac{\partial f_y}{\partial\theta} &= \frac{\partial f_y}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\theta} + \frac{\partial f_y}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\theta} = f_{yx}(x, y)(-r\sin\theta) + f_{yy}(x, y)(r\cos\theta)\end{aligned}$$

なので

$$\begin{aligned}z_{r\theta} &= (-rf_{xx}(x, y)\sin\theta + rf_{xy}(x, y)\cos\theta)\cos\theta - f_x(x, y)\sin\theta\\ &\quad + (-rf_{yx}(x, y)\sin\theta + rf_{yy}(x, y)\cos\theta)\sin\theta + f_y(x, y)\cos\theta\\ &= -r(f_{xx}(x, y) - f_{yy}(x, y))\sin\theta\cos\theta + rf_{xy}(x, y)(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\\ &\quad - f_x(x, y)\sin\theta + f_y(x, y)\cos\theta\end{aligned}$$

となります．

C46*. (連鎖公式) $z = f(x, y) = \tan^{-1}\dfrac{y}{x}$ を x, y の関数とし，$x = x(r, \theta)$, $y = y(r, \theta)$ は r, θ の関数とする．

(1) $\dfrac{\partial z}{\partial r}$, $\dfrac{\partial z}{\partial\theta}$ を求めよ．

(2) $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ $(r > 0)$ のとき $\dfrac{\partial z}{\partial r}$, $\dfrac{\partial z}{\partial\theta}$ を計算せよ．

C47*. (変数変換) $z = f(x, y)$ は C^2 級とする．$x = \dfrac{s^2 - t^2}{2}$, $y = st$ とおくとき $(s, t) \neq (0, 0)$ に対して次を示せ．

(1) $z_x^2 + z_y^2 = \dfrac{z_s^2 + z_t^2}{s^2 + t^2}$.

(2) $z_{xx} + z_{yy} = \dfrac{z_{ss} + z_{tt}}{s^2 + t^2}$.

C48*. (連鎖公式) $f(x, y, z)$ は x, y, z についての C^1 級関数とし，$x = x(y, z)$ は y, z についての C^1 級関数とする．

(1) $g(y, z) = f(x(y, z), y, z)$ とするとき $\dfrac{\partial}{\partial y}g(y, z)$ 及び $\dfrac{\partial}{\partial z}g(y, z)$ を計算せよ．

(2) さらに $y = y(z)$ は z の C^1 級関数とする．$h(z) = f(x(y(z), z), y(z), z)$ とするとき $\dfrac{d}{dz}h(z)$ を計算せよ．

[累次積分]

例題. (重積分) 積分 $I=\iint_{1\le x\le y\le 2}\log\frac{x}{y}\,dx\,dy$ を求めよ.

解答例. x,y が動く集合 D を求めます. $1\le x\le 2$ であり, x を1つ固定したとき y は $x\le y\le 2$ の範囲を動くので次のように累次積分できます.

$$\begin{aligned}
I&=\int_1^2 dx\int_x^2\log\frac{x}{y}\,dy=\int_1^2 dx\int_x^2(\log x-\log y)\,dy\\
&=\int_1^2\left[y\log x-(y\log y-y)\right]_{y=x}^{y=2}\,dx\\
&=\int_1^2(2\log x-2\log 2+2-x)\,dx\\
&=\left[2(x\log x-x)+(2-2\log 2)x-\frac{1}{2}x^2\right]_{x=1}^{x=2}=2\log 2-\frac{3}{2}
\end{aligned}$$

となります.

また $1\le y\le 2$ であり, y をこの範囲で1つ固定したとき x は $1\le x\le y$ の範囲を動くので

$$I=\int_1^2 dy\int_1^y\log\frac{x}{y}\,dx$$

と表すこともできます. このように累次積分しても $I=2\log 2-\dfrac{3}{2}$ となります.

C49. (順序交換) 次の積分の順序を交換せよ. ただし $a>0$ とする.

(1) $\displaystyle\int_0^a dy\int_0^{a-y}f(x,y)\,dx.$ (2) $\displaystyle\int_0^1 dx\int_{x^2}^{2-x}f(x,y)\,dy.$

C50*. (累次積分表示)

(1) 重積分 $\displaystyle\iint_D f(x)g(y)\,dx\,dy,\ D=[a,b]\times[c,d]$ を簡単にせよ. ただし a,b,c,d は定数とする.

(2) 重積分 $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dx\,dy,\ D=\{0\le y\le 2x-x^2\}$ を2通りの累次積分で表せ.

C51*. (累次積分) $D=\{1\le y\le x\le 2\}$ とする. $\displaystyle\iint_D\frac{1}{xy}\,dx\,dy$ を求めよ.

C52*. (累次積分) 次の重積分を求めよ. ただし 括弧内は集合 D を表す.

(1) $\displaystyle\iint_D\frac{dx\,dy}{x+y},\ \begin{pmatrix}0\le x\le 1\\ 2\le y\le 3\end{pmatrix}.$ (2) $\displaystyle\iint_D\sin(x+y)\,dx\,dy,\ \begin{pmatrix}0\le x,y\\ x+y\le\pi/2\end{pmatrix}.$

C53*. (累次積分) 次の重積分を求めよ. ただし $a>0$ とし, 括弧内は集合 D を表す.

(1) $\displaystyle\iint_D e^{x/y}\,dx\,dy,\ \begin{pmatrix}0\le x\le 1\\ x\le y\le 1\end{pmatrix}.$ (2) $\displaystyle\iint_D y\,dx\,dy,\ \left(0\le y\le\min\left\{\frac{1}{2},\sqrt{1-x^2}\right\}\right).$

(3) $\displaystyle\int_0^a\left(\int_y^a e^{-x^2}\,dx\right)dy.$

[重積分の変数変換]

例題. (変数変換) D を $1 \leq x^2 - y^2 \leq 4,\ x - \sqrt{3}y \geq 0,\ y \geq 0$ で与えられる集合とする．$\displaystyle\iint_D \frac{1}{x^2}\,dx\,dy$ を求めよ．

解答例. D は2つの双曲線と2直線で囲まれた集合なので $x = r\cosh t,\ y = r\sinh t$ とおきます．すると $x^2 - y^2 = r^2(\cosh^2 t - \sinh^2 t) = r^2$ なので $1 \leq r^2 \leq 4$ です．さらに $x \geq \sqrt{3}y \geq 0$ なので $x \geq 0$ です．$\cosh t = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \geq 1$ でしたから $r > 0$ をみたします．したがって $1 \leq r \leq 2$ となります．また $x \geq \sqrt{3}y \geq 0$ なので $x > 0$ のとき $\dfrac{y}{x} \geq 0$ であり，$\dfrac{y}{x} \leq \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ なので $\dfrac{y}{x} = \dfrac{\sinh t}{\cosh t} = \tanh t \leq \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ です．したがって $1 \leq r \leq 2,\ 0 \leq t \leq \tanh^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ です．またこの変換のヤコビアンは

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,t)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial t} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} = \cosh t(r\cosh t) - r\sinh t \sinh t = r$$

です．よって

$$\iint_D \frac{1}{x^2}\,dx\,dy = \int_1^2 \int_0^{\tanh^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{r^2\cosh^2 t} r\,dt\,dr = \int_1^2 \frac{1}{r}\,dr \int_0^{\tanh^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{\cosh^2 t}\,dt$$
$$= [\log|r|]_1^2 \cdot [\tanh t]_0^{\tanh^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\log 2}{\sqrt{3}}$$

となります．

C54. (ヤコビアン) $\mathbb{R}^2$ の集合 $D = \{(x,y) \mid 4x^2 \leq 4y - y^2\}$ の次の変数変換での変換される集合と変換のヤコビアンを求めよ．

(1) 点 $(0,2)$ を中心とする極座標変換 $x = r\cos\theta,\ y = 2 + 2r\sin\theta$.
(2) 原点を中心とする極座標変換 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$.

C55*. (座標変換) $a, b > 0$ を定数とし，$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leq 1\right\}$ とおく．

(1) 変数変換 $x = ar\cos\theta,\ y = br\sin\theta$ のヤコビアンを求めよ．
(2) 重積分 $\displaystyle\iint_D \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}\,dx\,dy$ を求めよ．

C56*. (極座標変換) 次の重積分を極座標に変換して求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_{x^2+y^2\leq 2x} (x^2+y^2)\,dx\,dy.$
(2) $\displaystyle\iint_D x^3 y\,dx\,dy,\ D = \{x^2 + y^2 \leq a^2, 0 \leq x \leq y\}.$

C57*. (変数変換) 次の重積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\iint_D \frac{1}{x^2+y^2}\,dx\,dy$ (D は例題のもの).
(2) $\displaystyle\iint_D xy\,dx\,dy$, D は曲線 $r = \sin 2\theta,\ \left(0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}\right)$ が囲む図形.

[広義重積分]

例題. (広義積分) $D=[0,\infty)\times[0,\infty)$ 上で関数 $f(x,y)=e^{-(x^2+y^2)}$ を積分せよ.

解答例. 集合 D の近似列を

$$K_n=\{x^2+y^2\le n^2,\ x\ge 0, y\ge 0\}=\left\{r\le n,\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right\}$$

とします. K_n 上で $f(x,y)$ を積分すると

$$\begin{aligned}\iint_{K_n} f(x,y)\,dx\,dy &= \int_0^n\int_0^{\pi/2} e^{-r^2} r\,d\theta\,dr=\int_0^{\pi/2}d\theta\int_0^n re^{-r^2}\,dr\\ &=\frac{\pi}{2}\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_{r=0}^{r=n}=\frac{\pi}{4}\left(1-e^{-n^2}\right)\end{aligned}$$

となります. $n\to\infty$ のとき $e^{-n^2}\to 0$ なので $\lim\limits_{n\to\infty}\iint_{K_n} f(x,y)\,dx\,dy=\frac{\pi}{4}$ です. いま $f(x,y)$ は D 上非負関数で, 1つの近似列 $\{K_n\}$ 上で収束しましたから $f(x,y)$ は D 上広義積分可能で, $\displaystyle\iint_D f(x,y)=\frac{\pi}{4}$ です.

$f(x,y)$ は D 上広義積分可能なので別の D の近似列 $R_n=[0,n]\times[0,n]$ でも同じ値に収束します. このとき

$$\iint_{R_n} f(x,y)\,dx\,dy=\int_0^n e^{-x^2}\,dx\int_0^n e^{-y^2}\,dy=\left(\int_0^n e^{-x^2}\,dx\right)^2$$

となります. よって $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^n e^{-x^2}\,dx\right)^2=\frac{\pi}{4}$ より $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ がわかります.

C58. (広義積分) $D=\{(x,y)\mid 0<x\le 1, 0<y\le 1\}$ とする.

(1) 正方形の列 $A_n=\left\{\dfrac{1}{n}\le x,y\le 1\right\}$ について $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\iint_{A_n}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)dx\,dy$ を求めよ.

(2) 集合 $B_n=A_n\cup\left\{\dfrac{1}{n^2}\le x\le\dfrac{1}{n}, x\le y\le 1\right\}$ について $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\iint_{B_n}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)dx\,dy$ を求めよ.

C59*. (広義積分) $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x\ge 0,\ y\ge 0,\ (x,y)\ne(0,0)\}$ とする.

$$\iint_D\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}(1+x^2+y^2)}\,dx\,dy$$

を求めよ.

C60*. (広義積分) 次の広義積分を求めよ. ただし $a>0$ とする.

(1) $\displaystyle\int_0^1\int_0^1\frac{1}{x+y}\,dx\,dy.$ (2) $\displaystyle\iint_{x^2+y^2\le a^2}\log(x^2+y^2)\,dx\,dy.$

C61*. (広義積分) $f(x,y)=e^{-x^2+2xy-5y^2}$ とする.

(1) $x-y=u$, $2y=v$ と変数変換するときのヤコビアン $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ を求めよ.

(2) $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy$ を求めよ.

[三重積分]

例題. (多重積分) $x, y, z \geq 0$ と回転放物面 $z = 1 - x^2 - y^2$ で囲まれる部分を V とする．V の体積を求めよ．

解答例. V は第一象限 $(x, y \geq 0)$ にある回転放物面 $z = 1 - (x^2 + y^2)$ の下側です．V の体積は V 上で定数関数 1 を積分します．

V の x, y 平面への射影 $\widetilde{V}$ は扇形 $x^2 + y^2 \leq 1,\ x, y \geq 0$ です．また $(x, y) \in \widetilde{V}$ を固定したとき z の範囲は $0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2$ なので

$$\iiint_V 1\, dx\, dy\, dz = \iint_{\widetilde{V}} \left(\int_0^{1-x^2-y^2} dz \right) dx\, dy$$

です．そこで $\widetilde{V}$ を極座標で表して $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ とおくと

$$\widetilde{V} = \left\{ (r, \theta) \mid 0 \leq r \leq 1,\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$

となり，ヤコビアンは $\dfrac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} = r$ なので

$$\iiint_V dx\, dy\, dz = \int_0^1 \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{1-r^2} dz \right) r\, d\theta\, dr$$

と表されます．したがって

$$\iiint_V xyz\, dx\, dy\, dz = \int_0^1 dr \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{1-r^2} r\, dz = \int_0^1 dr \int_0^{\pi/2} r(1 - r^2)\, d\theta$$
$$= \int_0^1 r - r^3\, dr \int_0^{\pi/2} d\theta = \left[\frac{1}{2} r^2 - \frac{1}{4} r^4 \right]_{r=0}^{r=1} [\theta]_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{8}$$

となります．

C62*. (三重積分) 次の三重積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\iiint_{0 \leq z \leq y \leq x \leq a} xyz\, dx\, dy\, dz.$　　(2) $\displaystyle\iiint_{y^2+z^2 \leq 1; 0 \leq x \leq y} dx\, dy\, dz.$

C63*. (三重積分) 4 点 $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ を頂点とする三角錐を V とする．$\displaystyle\iiint_V (x + y + z)\, dx\, dy\, dz$ を求めよ．

C64. (体積) 次の図形の体積を求めよ．ただし $a, b, c > 0$ とする．

(1) 楕円体 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} \leq 1.$

(2) 2 つの円柱 $x^2 + y^2 \leq a^2$ と $y^2 + z^2 \leq a^2$ で囲まれた部分．

C65*. (曲線の長さ，面積) $a > 0$ とし，極座標で $r = a(1 + \cos\theta)$ $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$ と表される曲線を C とする．

(1) C の長さを求めよ．

(2) C が囲む部分の面積を求めよ．

C66. (面積) 曲線 C を $x^2 - y^2 = 1,\ (x > 0)$ とし，C 上の点 $P = (P_x, P_y)$ をとる．

(1) 原点と点 P とを結ぶ直線と x 軸，C で囲まれる部分の面積 S を求めよ．

(2) 点 P の座標は $(\cosh 2S, \sinh 2S)$ であることを示せ．

ただし $P_y < 0$ のとき $S < 0$ とする．