[集合]

考える対象の集まりを**集合**と呼びます．集合は

(1) その要素を列記する ($A = \{1, 2, 3\}$),

(2) その要素がみたす条件を記述する ($B = \{x \geq 0$ なる実数 $\}$)

のように表します．集合に属する対象をその集合の**要素**あるいは**元**といいます．

a が集合 A の要素であることを

$$a \in A \text{ あるいは } A \ni a$$

のように表します．a が集合 A の要素でないときは

$$a \notin A \text{ あるいは } A \not\ni a$$

と表します．

2 つの集合 A, B に対して命題

$$x \in A \text{ ならば } x \in B$$

が成立するとき A は B の**部分集合**であるといい

$$A \subset B \text{ あるいは } B \supset A$$

で表します．A が B の部分集合でないときは

$$A \not\subset B \text{ あるいは } B \not\supset A$$

と表します．このとき A の要素 a で $a \notin B$ となるものが存在します．

記号 $\in$ と $\subset$ は似ていますが

“$\in$” は集合とその要素の関係,

“$\subset$” は 2 つの集合の間の包含関係

を表します．集合 A の要素のうち，条件 P をみたすもののなす集合を

$$\{x \in A \mid P\}$$

で表します．

2 つの集合 A, B について

$$A \subset B \text{ かつ } B \subset A$$

が成り立つとき集合 A と集合 B は**等しい**といい

$$A = B$$

で表します．したがって $A = B$ のとき $A \subset B$ でもあるので

$$A \subset B \text{ と } A \subseteqq B \text{ は同じ意味}$$

です．また A は B の部分集合であるが $A \neq B$ であるときは

$$A \subsetneqq B$$

と表します．

2 つの集合 A, B に対して $x \in A$ かつ $x \in B$ をみたす要素 x の集合を A と B の**共通部分**といい $A \cap B$ で表します.

$$A \cap B = \{x \in A \text{ かつ } x \in B\}.$$

また $x \in A$ または $x \in B$ をみたす要素 x の集合を A と B の**和集合**といい $A \cup B$ で表します.

$$A \cup B = \{x \in A \text{ または } x \in B\}.$$

特に

$$A \cap B \subset A \subset A \cup B, \quad A \cap B \subset B \subset A \cup B$$

が成り立ちます.

A の要素のうち B の要素でないもののなす集合を A の B による**差集合**といい $A \setminus B$ で表します.

$$A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}.$$

A の要素と B の要素の組を要素とする集合を A と B の**直積集合**といい $A \times B$ で表します.

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

例えば $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{x, y\}$ のとき $A \times B$ は

$$A \times B = \{(1, x), (1, y), (2, x), (2, y), (3, x), (3, y)\}$$

の 6 個の要素を持つ集合となります．また直積集合 $A \times A$ を単に A^2 で表すこともあります．さらに n 個の A の要素の組のなす集合を A^n で表します.

$$A^n = \overbrace{A \times \cdots \times A}^{n \text{ 個}} = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_1, \ldots, a_n \in A\}.$$

以下の集合は数学においてよく用いられます.

$$\begin{aligned}
\mathbb{N} &= \{\text{ 自然数全体のなす集合 }\} = \{1, 2, 3, \ldots\} \\
\mathbb{Z} &= \{\text{ 整数全体のなす集合 }\} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\} \\
\mathbb{Q} &= \{\text{ 有理数全体のなす集合 }\} = \left\{\frac{q}{p} \mid p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{Z}\right\} \\
\mathbb{R} &= \{\text{ 実数全体のなす集合 }\} \\
\mathbb{C} &= \{\text{ 複素数全体のなす集合 }\} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}, i \text{ は虚数単位 }\}
\end{aligned}$$

とくに $\mathbb{R}^n$ は n 個の実数の組のなす集合です.

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}.$$

この集合の要素は

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \;\middle|\; x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

と表すこともあります.

$a, b \in \mathbb{R}$ に対して $\mathbb{R}$ の部分集合 $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ を**開区間**といい (a, b) で表します．また $\mathbb{R}$ の部分集合 $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ を**閉区間**といい $[a, b]$ で表します．これらを組み合わせたような**区間**は

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$

のように表します.

[写像]

A, B を集合とします．A の要素 a に対して B の要素を対応させる対応 f を A から B への<u>**写像**</u>といい，$f\colon A \to B$ と表します．写像 $f\colon A \to B$ によって $a \in A$ に対応する B の要素を $f(a)$ で表します．

$$f\colon A \to B;\ a \mapsto f(a).$$

例. (1) $A = B = \mathbb{R}$ とします．$f(x) = \dfrac{1}{x}$ は $x = 0$ で定義されていないため A から B への写像ではありません．f は A から $\{0\}$ の除いた集合 $A' = A \setminus \{0\}$ から B への写像にはなります．

(2) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$, $B = \mathbb{R}$ とします．$a \in A$ に対して $b^2 = a$ をみたす $b \in B$ を対応させる対応 f は $a \in A$ に対応する b をただ１つに決めることができないため写像ではありません．

写像 $f\colon A \to B$ では任意の $a \in A$ に対して B の元がただ一つ対応します．

$f\colon A \to B$ を写像とします．f が条件

「$a,\, a' \in A$ が，$a \neq a'$ ならば $f(a) \neq f(a')$」

をみたすとき，写像 f は<u>**単射**</u>であるといいます．また f は A から B へ<u>**１対１に対応する**</u>といいます．f が単射であることは，対偶を考えて，条件

「$a,\, a' \in A$ が，$f(a) = f(a')$ ならば $a = a'$」

と同値です．f が単射であるということは，

B の元に対応してくる A の元がもしあれば，それは１つ

ということもできます．

例 (1) $\mathbb{R}$ 上の定数関数 $f(x) = 0$ は $f(0) = f(1) = 0$ であり，単射ではありません．

(2) $\mathbb{R}$ 上の１次関数 $f(x) = x$ は $x, y \in \mathbb{R}$ に対して $f(x) = f(y)$ のとき $x = y$ をみたすので単射です．

写像 $f\colon A \to B$ が条件

「任意の $b \in B$ に対して $f(a) = b$ をみたす $a \in A$ が存在する」

をみたすとき，写像 f は<u>**全射**</u>であるといいます．したがって f が全射であるということは，

B の全ての元それぞれに対応してくる A の元が必ずある

といえます．

例 (1) 写像 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ を $x \in \mathbb{R}$ に対して $f(x) = (x, x)$ とします．このとき $(1, 0) \in \mathbb{R}^2$ に対して $f(x) = (1, 0)$ をみたす $x \in \mathbb{R}$ は存在しないので f は全射ではありません．

(2) 写像 $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を点 (x, y) に対して $g(x, y) = x$ とします．このとき任意の $z \in \mathbb{R}$ に対して $(z, 0) \in \mathbb{R}^2$ をとると $g(z, 0) = z$ をみたすので g は全射です．

写像 $f\colon A \to B$ が全射かつ単射であるとき，単に**全単射**といいます．f が全単射であるとき，f は全射なので

$$\text{任意の } b \in B \text{ に対して } f(a) = b \text{ をみたす } a \in A \text{ が存在}$$

します．さらに f は単射でもあるので

$$\text{このような } a \in A \text{ はただ } 1 \text{ つ}$$

です．そこで $b \in B$ に対して $f(a) = b$ をみたす $a \in A$ を対応させることができます．この対応を f の**逆写像**といい，f^{-1} で表します．

$$f^{-1}\colon B \to A;\ b \mapsto f^{-1}(b) = [f(a) = b \text{ をみたす } a]$$

例. (1) $A = B = \mathbb{R}$ とし，$f(x) = e^x$ を指数関数とします．$f(x) = f(y)$ とすると $e^x = e^y$ ですから自然対数をとって $x = y$ となります．したがって f は単射です．しかし $-1 \in B = \mathbb{R}$ に対して $f(x) = e^x = -1$ となる x は存在しませんから f は全射ではありません．

そこで $A = \mathbb{R}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ とすると $f(x) = e^x$ は全単射になります．したがって逆写像 $f^{-1}\colon B \to A$ が存在します．指数関数の逆写像が対数関数であり $f^{-1}(x) = \log x$ となります．

(2) $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}\right\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\}$ とします．写像 $f\colon A \to B$ を $f(x) = \sin x$ とすると f は全単射であり，逆写像 $f^{-1}\colon B \to A$ が存在します．$f = \sin$ と表されるので $f^{-1} = \sin^{-1}$ と書き $\sin^{-1} x$ を**逆正弦関数**といいます．

慣例として $\sin^2 x$ は $(\sin x)^2$ を表しますが，$\sin^{-1} x$ は $\sin x$ の逆関数を表し，$\dfrac{1}{\sin x}$ では**ありません**．

紛らわしい場合は

$$\begin{aligned} &\arcsin x = \sin^{-1} x \quad (\sin x \text{ の逆関数}), \\ &\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x} \end{aligned}$$

と表すこともあります．

A, B, C を集合とし，$f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$ を写像とします．このとき $a \in A$ に対して，写像 f によって $b = f(a) \in B$ が対応し，さらに $b = f(a)$ は B の元なので写像 g によって $g(b) = g(f(a)) \in C$ が対応します．このようにして得られる写像

$$A \ni a \mapsto g(f(a)) \in C$$

を $g \circ f$ で表し，f と g の**合成写像**といいます．

$$g \circ f\colon A \to C;\ a \mapsto (g \circ f)(a) = g(f(a)).$$

このように写像は記号 $\circ$ の右側のものから順に適用されます．

例 $f(x) = \sin x$, $g(x) = x^2$ とします．このとき

$$(g \circ f)(x) = (\sin x)^2 = \sin^2 x, \quad (f \circ g)(x) = \sin(x^2)$$

です．

[初等関数]

(1) 指数関数．$a > 0$ とします．有理数 $r = q/p$ ($p \in \mathbb{N},\ q \in \mathbb{Z}$) に対して値 a^r を方程式 $y^p = a^q$ の正の解 y として定めます．こうして任意の $r \in \mathbb{Q}$ に対して a^r を定めることができます．次に任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して x に収束する有理数の増加列 $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ をとります．r_n は有理数なので a^{r_n} が定義されます．さらに $n \to \infty$ のとき数列 $\{a^{r_n}\}_{n=1}^{\infty}$ の極限が存在します．そこで $a^x = \lim_{n\to\infty} a^{r_n}$ と定めます．こうして実数上の関数 $y = a^x$ が定義され，これを **a を底とする指数関数**といいます．

定理. (指数関数)

指数関数は次の性質を持つ．

(1) (指数法則) $a, b > 0$ とする．任意の $x, y \in \mathbb{R}$ に対して
$a^{x+y} = a^x a^y$, $a^x b^x = (ab)^x$, $(a^x)^y = a^{xy}$, $a > 1$ かつ $x > 0$ のとき $a^x > 1$.

(2) (狭義単調性)
$a > 1$ のとき a^x は狭義単調増加で $\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$, $\lim_{x\to\infty} a^x = \infty$.
$0 < a < 1$ のとき a^x は狭義単調減少で $\lim_{x\to-\infty} a^x = \infty$, $\lim_{x\to\infty} a^x = 0$.
$a = 1$ のとき任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $a^x = 1^x = 1$.

(3) (連続性) 指数関数 a^x は $\mathbb{R}$ 上で連続で区間 $(0, \infty)$ への全単射.

ちなみに a^{b^c} は $a^{(b^c)}$ を意味します．

ここで**単調増加**であるとは

$$x \leq y \text{ ならば } f(x) \leq f(y)$$

が成立することです．また**狭義単調増加**であるとは

$$x < y \text{ ならば } f(x) < f(y)$$

が成立することです．この不等号の向きを変えて単調減少，狭義単調減少が定義できます．

(2) 対数関数.

$a > 0$ とします．指数関数 $f(x) = a^x$ は $\mathbb{R}$ 上連続で，$0 < a < 1$ のときは狭義単調減少，$a > 1$ のときは狭義単調増加ですから $a > 0, a \neq 1$ のとき $f(x) = a^x$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ が定義され，$f^{-1}(x)$ は連続関数となります．この関数を **a を底とする対数関数**といい $y = \log_a x$ で表します．したがって $f(x) = \log_a x$ は $x > 0$ で定義された狭義単調な連続関数です．

定理. (対数関数)

$a > 0, a \neq 1$ とする．

(1) (対数法則) 任意の $x, y > 0$, $z \in \mathbb{R}$ に対して
$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$, $\log_a 1 = 0$, $\log_a x^z = z \log_a x$.

(2) (狭義単調性) $\log_a x$ は
$a > 1$ のとき狭義単調増加で $\lim_{x\to+0} \log_a x = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} \log_a x = \infty$.
$0 < a < 1$ のとき狭義単調減少で $\lim_{x\to+0} \log_a x = \infty$, $\lim_{x\to\infty} \log_a x = -\infty$.

(3) (連続性) $\log_a x$ は区間 $(0, \infty)$ で定義された連続関数で $\mathbb{R}$ への全単射.

数学では $\log x$ は自然対数 $\log_e x$ を表します．工学系では自然対数 $\log_e x$ を $\ln x$ で表し，$\log x$ は常用対数 $\log_{10} x$ を表すことがあります．

(3) 逆三角関数.

$y=\sin x$ は $\mathbb{R}$ 上の連続関数で区間 $I=\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上では狭義単調増加ですから I から区間 $J=[-1,1]$ への関数とみてこの範囲で連続な逆関数を持ちます．この $[-1,1]$ から $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ への関数を $\sin^{-1}x$ や $\arcsin x$ で表し，**逆正弦関数**といいます．$\sin^{-1}x$ は狭義単調増加な連続関数です．一般に $\sin^2 x$ は $(\sin x)^2$ を表しますが，$\sin^{-1}x$ は $\sin x$ の逆関数であり，$\dfrac{1}{\sin x}$ ではありません.

$y=\cos x$ は $\cos x=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$ と表されますから，$y=x+\dfrac{\pi}{2}$ 及び $\sin x$ が連続であることよりこれらの合成関数である $\cos x$ も連続となります．また区間 $[0,\pi]$ で狭義単調減少ですから連続な逆関数を持ちます．これを**逆余弦関数**といい，$\cos^{-1}x$ や $\arccos x$ で表します.

$y=\tan x$ は $\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ と表されますから，$\sin x$ 及び $\cos x$ が連続であることより $\cos x=0$ なる x を除いて連続です．また $\tan x$ は区間 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ で狭義単調増加ですから連続な逆関数を持ちます．これを**逆正接関数**といい $\tan^{-1}x$ や $\arctan x$ で表します.

$$\boxed{-\frac{\pi}{2}\le\sin^{-1}x\le\frac{\pi}{2},\quad 0\le\cos^{-1}x\le\pi,\quad -\frac{\pi}{2}<\tan^{-1}x<\frac{\pi}{2}}$$

これらの範囲にある値を逆三角関数の**主値**といいます.

(4) 双曲線関数.

$$\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2},\ \cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2},\ \tanh x=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$$

を**双曲線関数**といいます．指数関数 e^x 及び e^{-x} は連続ですので $\sinh x$, $\cosh x$ は $\mathbb{R}$ 上連続です．また任意の $x\in\mathbb{R}$ に対して $e^x+e^{-x}>0$ ですから $\tanh x$ も $\mathbb{R}$ 上連続です.

双曲線関数は三角関数と同様な「加法定理」などが成り立ちます.

命題. (双曲線関数)

(1) $\cosh^2 x-\sinh^2 x=1$.
(2) $\sinh(x\pm y)=\sinh x\cosh y\pm\cosh x\sinh y$.
(3) $\cosh(x\pm y)=\cosh x\cosh y\pm\sinh x\sinh y$.
(4) $\sinh(2x)=2\sinh x\cosh x$.
(5) $\cosh(2x)=\cosh^2 x+\sinh^2 x=2\cosh^2 x-1=1+2\sinh^2 x$.
(6) $\cosh^2\dfrac{x}{2}=\dfrac{\cosh x+1}{2},\ \sinh^2\dfrac{x}{2}=\dfrac{\cosh x-1}{2}$.

(5) 逆双曲線関数.

$\sinh x$ は $\mathbb{R}$ 上狭義単調増加な連続関数なので $\mathbb{R}$ 上で逆関数を持ちます．$\sinh x$ の逆関数を $\sinh^{-1}x$ で表します．$\cosh x$ は $x\ge 0$ において狭義単調増加な連続関数ですので，この範囲において逆関数 $\cosh^{-1}x$ を持ちます．$\cosh^{-1}x$ は $[1,\infty)$ 上の連続関数で値域は $[0,\infty)$ です．$\tanh x$ は $\mathbb{R}$ 上で狭義単調増加な連続関数なので $\mathbb{R}$ 上で逆関数を持ちます．$\tanh x$ の値域は $(-1,1)$ ですので $\tanh^{-1}x$ は $(-1,1)$ 上定義され，値域は $\mathbb{R}$ です.

[微分法]

関数 $y = f(x)$ は $x = a$ の近くで定義されているとします．関数 $f(x)$ に対して x が微少な量 Δx だけ変化したときの y の変化の割合を考えます．

$x = a + \Delta x$ のとき $\Delta y = f(x) - f(a)$ とします．この比 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ において $\Delta x \to 0$ としたとき，有限な極限値

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

が存在するとき $f(x)$ は $x = a$ で**微分可能**であるといいます．この極限値を $f(x)$ の $x = a$ における**微分係数**と呼び $f'(a)$ と表します．

関数 $f(x)$ が $x = a$ で微分可能であるとき，$x \to a$ のとき $f(x) \to f(a)$ となりますから $f(x)$ は $x = a$ で連続となります．ところが，$x = a$ で連続でも $x = a$ で微分可能とは限りません．

命題. (微分可能性と連続)

$f(x)$ が $x = a$ で微分可能ならば $f(x)$ は $x = a$ で連続．

関数 $f(x)$ が区間 I の各点で微分可能であるとき，$f(x)$ は **I 上微分可能**であるといいます．このとき $a \in I$ に対して $x = a$ での $f(x)$ の微分係数 $f'(a) \in \mathbb{R}$ を対応させる関数を $f(x)$ の**導関数**といい，$f'(x)$ で表します．$y = f(x)$ の導関数は $\dfrac{df}{dx}(x)$, $\dfrac{d}{dx}f(x)$, y', $\dfrac{dy}{dx}$ とも表します．

導関数に関して次が成り立ちます．

(1) (微分係数の四則法則) $f(x)$, $g(x)$ が共に $x = a$ で微分可能のとき $f(x) + g(x)$, $cf(x)$ (ただし $c \in \mathbb{R}$), $f(x)g(x)$, $g(x)/f(x)$ (ただし $f'(a) \neq 0$) も $x = a$ で微分可能で，次のようになります．

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a),\ (cf)'(a) = cf'(a),$$
$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a),$$
$$\left(\frac{g}{f}\right)'(a) = \frac{g'(a)f(a) - g(a)f'(a)}{f(a)^2}.$$

(2) (合成関数の微分係数) $y = f(x)$ は $x = a$ で微分可能，$z = g(y)$ は $y = b = f(a)$ で微分可能のとき合成関数 $z = g(f(x))$ も $x = a$ で微分可能で

$$\frac{dz}{dx}(a) = g'(f(a))f'(a) = \frac{dg}{dy}(b)\frac{dy}{dx}(a).$$

(3) (逆関数の微分係数) $y = f(x)$ はある区間で連続で狭義単調とします．$f(x)$ が $x = a$ で微分可能で $f'(a) \neq 0$ とすると逆関数 $x = f^{-1}(y)$ も $y = b = f(a)$ で微分可能で

$$\frac{dx}{dy}(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}(a)} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}\left(f^{-1}(b)\right)}.$$

(4) (媒介変数表示の微分) $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ において $\varphi(t)$ は狭義単調とします．このとき $\varphi(t)$ の逆関数 $t = \varphi^{-1}(x)$ が存在して $y = \psi(\varphi^{-1}(x))$ は x の関数とみなせます．$\varphi(t), \psi(t)$ が $t = t_0$ で微分可能で $\varphi'(t_0) \neq 0$ のとき y も $x = a = \varphi(t_0)$ で微分可能で

$$\frac{dy}{dx}(a) = \frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)} = \frac{\frac{d\psi}{dt}(t_0)}{\frac{d\varphi}{dt}(t_0)}.$$

[高階導関数]

$y = f(x)$ の導関数 $f'(x)$ が $x = a$ で微分可能であるとき $f'(x)$ の $x = a$ での微分係数が存在します．これを $f(x)$ の $x = a$ での**第２次の微分係数**といい $f''(a)$ で表します．したがって

$$f''(a) = \lim_{x \to a} \frac{f'(x) - f'(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f'(a+h) - f'(a)}{h}$$

となります．

区間 I 上で定義された関数 $f(x)$ が I 上微分可能で任意の $a \in I$ で $f'(x)$ が微分可能であるとき，$f'(x)$ の導関数を $f''(x)$ と書き，これを**2 階導関数**といいます．$y = f(x)$ の 2 階導関数は

$$\frac{d^2 f}{dx^2}(x),\ \frac{d^2}{dx^2} f(x),\ y'',\ \frac{d^2 y}{dx^2}$$

のように表します．

同様に I 上定義された関数 $f(x)$ が I 上 n 回微分可能であるとき $f(x)$ を n 回微分して得られる関数を **n 階導関数**といい，$f^{(n)}(x)$ で表します．また $y = f(x)$ の n 階導関数は

$$f^{(n)}(x),\ \frac{d^n f}{dx^n}(x),\ \frac{d^n}{dx^n} f(x),\ y^{(n)},\ \frac{d^n y}{dx^n},\ \frac{d^n}{dx^n} y$$

のようにも表します．2 階以上の導関数を**高階導関数**といいます．

区間 I 上定義された関数 $f(x)$ が I 上で n 回微分可能であるとします．$f(x)$ の n 階導関数 $f^{(n)}(x)$ が I 上で連続であるとき $f(x)$ は I 上で **C^n 級**であるといいます．特に $f(x)$ が I 上連続のときは $f(x)$ は I 上 C^0 級です．

定義．（C^n 級）

区間 I 上定義された関数 $f(x)$ が I 上 n 回微分可能で，その n 階導関数 $f^{(n)}(x)$ が連続であるとき $f(x)$ は I 上 **C^n 級**であるという．

また $f(x)$ が I 上で何回でも微分可能であるとき $f(x)$ は I 上で **C^∞ 級**であるといいます．したがって $f(x)$ が I 上 C^∞ 級のとき任意の自然数 n に対して C^n 級でもあります．また微分可能な関数は連続でもあるので C^1 級ならば C^0 級です．

$$C^\infty \text{ 級} \Longrightarrow \text{任意の } n \text{ について } C^n \text{ 級}.$$
$$C^n \text{ 級} \Longrightarrow C^{n-1} \text{ 級} \Longrightarrow \cdots \Longrightarrow C^1 \text{ 級} \Longrightarrow C^0 \text{ 級}.$$

$f(x), g(x)$ が n 回微分可能のとき，n 階導関数についても

$$\frac{d^n}{dx^n}(f(x) + g(x)) = f^{(n)}(x) + g^{(n)}(x)$$
$$\frac{d^n}{dx^n}(cf(x)) = cf^{(n)}(x) \quad (c \in \mathbb{R})$$

が成り立ちます．積については ${}_nC_k$ を二項係数として次が成立します．

定理．（ライプニッツの公式）

$f(x), g(x)$ は n 回微分可能とする．このとき

$$\frac{d^n}{dx^n}(f(x)g(x)) = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x).$$

[基本的な原始関数]

関数 $f(x)$ に対して微分可能な関数 $F(x)$ で $F'(x) = f(x)$ となるものを $f(x)$ の**原始関数**と呼び，これを $\int f(x)\,dx$ で表します．

$f(x)$ の区間 I における1つの原始関数を $F(x)$ とするとき，$f(x)$ の I における全ての原始関数は $F(x) + C$ (C は定数) と表されます．この C を**積分定数**といいます．

いろいろな原始関数．ただし，$a \neq 0$，積分定数は省略．

(1) $\displaystyle\int x^\alpha\,dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\ \ (\alpha \neq -1), \qquad \int x^{-1}\,dx = \log|x|.$

(2) $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x, \qquad \int a^x\,dx = \frac{1}{\log a}a^x\ \ (a > 0,\, a \neq 1).$

(3) $\displaystyle\int \log|x|\,dx = x\log|x| - x.$

(4) $\displaystyle\int \sin(ax+b)\,dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b), \qquad \int \cos(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b).$

(5) $\displaystyle\int \tan(ax+b)\,dx = -\frac{1}{a}\log|\cos(ax+b)|.$

(6) $\displaystyle\int \sin^{-1}(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\left((ax+b)\sin^{-1}(ax+b) + \sqrt{1-(ax+b)^2}\right).$

(7) $\displaystyle\int \cos^{-1}(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\left((ax+b)\cos^{-1}(ax+b) - \sqrt{1-(ax+b)^2}\right).$

(8) $\displaystyle\int \tan^{-1}(ax+b)\,dx = \frac{1}{2a}\left(2(ax+b)\tan^{-1}(ax+b) - \log(1+(ax+b)^2)\right).$

(9) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right|.$

(10) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}.$

(11) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \sin^{-1}\frac{x}{a}\ \ (a > 0).$

(12) $\displaystyle\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\sin^{-1}\frac{x}{a}\right)\ \ (a > 0).$

(13) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \log\left|x + \sqrt{x^2+a}\right|.$

(14) $\displaystyle\int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+a} + a\log\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|\right).$

(15) $\displaystyle\int f(x^2)x\,dx = \frac{1}{2}\int f(t)\,dt\ \ (t = x^2).$

(16) $\displaystyle\int f(\sin x)\cos x\,dx = \int f(t)\,dt\ \ (t = \sin x),$

$\displaystyle\int f(\cos x)\sin x\,dx = -\int f(t)\,dt\ \ (t = \cos x).$

(17) $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log|f(x)|.$

(18) $\displaystyle I_m = \int \frac{1}{(x^2+a)^m}\,dx = \frac{1}{2a(m-1)}\left(\frac{x}{(x^2+a)^{m-1}} + (2m-3)I_{m-1}\right)$

$(m \neq 1).$

これらは，右辺を微分することによって，または部分積分，置換積分などを用いて示すことができます．

[原始関数の計算]

関数 $f(x)$ の原始関数を求めることを**積分する**といいます．いくつかの関数の原始関数は，基本的な関数の原始関数からいくつかの公式を繰り返し用いて得られることがあります．

定理. (積分公式)

$f(x), g(x)$ を関数とし，a, b は定数とする．

(1) (線形性) $\displaystyle\int (af(x)+bg(x))\,dx = a\int f(x)\,dx + b\int g(x)\,dx.$

(2) (部分積分法) $f(x)$ が微分可能のとき $G(x)=\int g(x)\,dx$ とすると
$$\int f(x)g(x)\,dx = f(x)G(x) - \int f'(x)G(x)\,dx.$$

(3) (置換積分法) $x=\varphi(t)$ で $\varphi(t)$ が C^1 級のとき
$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

(I) 有理関数の原始関数.

$P(x)\neq 0$, $Q(x)$ を多項式として $f(x)=\dfrac{Q(x)}{P(x)}$ とします．このような $f(x)$ を**有理関数**といいます．このとき $\int f(x)\,dx$ は次のように計算できます．

まず $g(x)$, $R(x)$ を多項式として，$Q(x)=g(x)P(x)+R(x)$, ($R(x)=0$ または $\deg R(x) < \deg P(x)$) と分解します．これより $\displaystyle\int f(x)\,dx = \int g(x)\,dx + \int \frac{R(x)}{P(x)}\,dx$ となります．$g(x)$ は多項式ですのでこの原始関数は計算できます．$R(x)/P(x)$ については，$\alpha_i, \beta_j, \gamma_j$ たちを実数として $P(x)$ を

$$P(x)=a(x+\alpha_1)^{m_1}\cdots(x+\alpha_k)^{m_k}(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^{n_1}\cdots(x^2+\beta_\ell x+\gamma_\ell)^{n_\ell},\ (\beta_j^2-4\gamma_j<0)$$

と因数分解し，$R(x)/P(x)$ を

$$\frac{R(x)}{P(x)} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m_i}\frac{A_{i,j}}{(x+\alpha_i)^j} + \sum_{i=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{B_{i,j}x+C_{i,j}}{(x^2+\beta_i x+\gamma_i)^j}\quad (A_{i,j}, B_{i,j}, C_{i,j}\in\mathbb{R})$$

と部分分数分解します．ここで $A_{i,j}$, $B_{i,j}$, $C_{i,j}$ は定数です．第 1 項の原始関数は計算できます．第 2 項は

$$\frac{Bx+C}{(x^2+\beta x+\gamma)^n} = \frac{B}{2}\frac{2x+\beta}{(x^2+\beta x+\gamma)^n} + \left(C-\frac{\beta B}{2}\right)\frac{1}{((x+\beta/2)^2+(\gamma-\beta^2/4))^n}$$

と分けて，第 1 項は置換積分で計算できます．第 2 項は $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+a)^n}\,dx$ の形ですので，基本的な原始関数 (18) によって帰納的に計算できます．

例えば $f(x)=\dfrac{4}{(x-1)^3(x^2+1)}$ とします．これを部分分数分解すると

$$f(x)=\frac{1}{x-1}-\frac{2}{(x-1)^2}+\frac{2}{(x-1)^3}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+1}+\frac{1}{x^2+1}$$

となります．

[三角関数の原始関数]
(II) 三角関数の原始関数.
$R(X,Y)$ を X,Y の有理関数とします. つまり,

$$P(X,Y) = a_{00} + a_{10}X + a_{01}Y + a_{20}X^2 + a_{11}XY + \cdots + a_{1n-1}XY^{n-1} + a_{0n}Y^n,$$
$$Q(X,Y) = b_{00} + b_{10}X + b_{01}Y + b_{20}X^2 + b_{11}XY + \cdots + b_{1m-1}XY^{m-1} + b_{0m}Y^m$$

を多項式として

$$R(X,Y) = \frac{Q(X,Y)}{P(X,Y)} \text{ (ただし } P(X,Y) \neq 0)$$

と表されるとします.

有理関数に三角関数を代入して表される関数 $f(x) = R(\cos x, \sin x)$ の原始関数 $\displaystyle\int f(x)\,dx$ は次のように計算できます.

$t = \tan\dfrac{x}{2}$ とおきます. $n \in \mathbb{Z}$ として $x \neq (2n+1)\pi$ で t は x の C^1 級関数であり

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2},\ \frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2}$$

と表されますから, 置換積分によって

$$\int R(\cos x, \sin x)\,dx = \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\,dt$$

となります. $R(X,Y)$ は有理関数でしたから $R\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}, \dfrac{2t}{1+t^2}\right)\dfrac{2}{1+t^2}$ は t の有理関数になります. したがって積分することができます.

特に $\sin^2 x$ と $\cos^2 x$ の有理関数 $f(x) = R(\cos^2 x, \sin^2 x)$ のときは $t = \tan x$ とおくと $x \neq \left(n + \dfrac{1}{2}\right)\pi$ で t は x の C^1 級関数で

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2},\ \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2},\ \frac{dx}{dt} = \frac{1}{1+t^2}$$

となります. したがってこの場合も

$$\int R(\cos^2 x, \sin^2 x)\,dx = \int R\left(\frac{1}{1+t^2}, \frac{t^2}{1+t^2}\right)\frac{1}{1+t^2}\,dt$$

と有理関数の積分に帰着できます.

このように変数変換することによって三角関数の有理式は必ず積分することができますが, 計算が煩雑になることがあります. 他の上手な変数変換をして簡単な積分になることもあります.

[ベキ根関数の原始関数]

(III) ベキ根関数の原始関数.

ベキ根関数の原始関数を求めることは一般に難しいですが，いくつかは計算できます．前と同様に $R(X,Y)$ は有理関数とします.

(III-1) 2 次式の平方根のみの場合，$f(x) = R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)$.

(III-1-1) $a > 0$ のとき $\sqrt{ax^2+bx+c} = t - \sqrt{a}x$ と t をおきます．このとき

$$x = \frac{t^2 - c}{2\sqrt{a}t + b},\ \frac{dx}{dt} = \frac{2\left(\sqrt{a}t^2 + bt + c\sqrt{a}\right)}{(2\sqrt{a}t+b)^2}$$

となります．したがって

$$\int f(x)\,dx = \int R\left(\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}t+b}, t - \sqrt{a}\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}t+b}\right)\frac{2\left(\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a}\right)}{(2\sqrt{a}t+b)^2}\,dt$$

となり有理関数に帰着できます.

(III-1-2) $a < 0$ のとき $ax^2+bx+c=0$ の 2 実根を $\alpha < \beta$ として $t = \sqrt{\dfrac{x-\alpha}{\beta-x}}$ とおきます．このとき

$$x = \frac{\beta t^2 + \alpha}{t^2+1} = \beta - \frac{\beta-\alpha}{t^2+1},\ \frac{dx}{dt} = \frac{2(\beta-\alpha)t}{(t^2+1)^2}$$

です．また $ax^2+bx+c = a(x-\alpha)(x-\beta)$ なので

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{-a(x-\alpha)(\beta-x)} = \sqrt{-a}(\beta-x)t$$

です．したがって

$$\int f(x)\,dx = \int R\left(\frac{\beta t^2+\alpha}{t^2+1}, \sqrt{-a}\left(\beta - \frac{\beta t^2+\alpha}{t^2+1}\right)t\right)\frac{2(\beta-\alpha)t}{(t^2+1)^2}\,dt$$

となり，有理関数に帰着できます.

(III-2) 1 次式の根号のみの場合，$f(x) = R\left(x, \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right)$．ただし $ad-bc \neq 0$.

$t = \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$ とおきます．このとき

$$x = \frac{dt^n - b}{-ct^n + a},\ \frac{dx}{dt} = \frac{(ad-bc)nt^{n-1}}{(ct^n-a)^2}$$

です．したがって

$$\int f(x)\,dx = \int R\left(\frac{dt^n-b}{-ct^n+a}, t\right)\frac{(ad-bc)nt^{n-1}}{(ct^n-a)^2}\,dt$$

となります.

[広義積分]

関数 $f(x)$ は閉区間 $I=[a,b]$ 上連続とします．関数の原始関数がわかると $f(x)$ の I における定積分が次で求まります．

定理. (微分積分学の基本定理)

$f(x)$ が $I=[a,b]$ 上連続で I 上原始関数 $F(x)$ を持つならば
$$\int_a^b f(x)\,dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$$
である．

関数 $f(x)$ の I 上での定積分が存在するとき $f(x)$ は I 上**積分可能**あるいは**可積分**といいます．

関数 $f(x)$ は I 上定義されているとします．ある $a\in\mathbb{R}$ で x が I の点を動きながら a に近づくとき $|f(x)|$ が ∞ に発散するならば $f(x)$ は I において有界でないといいます．

有界でない関数や無限区間 $[a,\infty)$ などについての積分を積分区間に関する極限値で定義します．

(I) 有界でない関数の積分．

関数 $f(x)$ は区間 I で定義されているとします．ある定数 M が存在して，全ての $x\in I$ に対して $|f(x)|\le M$ をみたすとき $f(x)$ は I 上**有界**であるといいます．

$x=a$ の近くで関数 $f(x)$ が有界でないとき $x=a$ を $f(x)$ の**特異点**であるといいます．

$f(x)$ は $(a,b]$ で有界ではなく，$a<a'<b$ をみたす任意の a' に対して $f(x)$ は閉区間 $[a',b]$ 上で有界で積分可能であるとします ($x=a$ は特異点)．このとき定積分 $\displaystyle\int_{a'}^b f(x)\,dx$ が存在しますが，$a'\to a+0$ としたときの極限値も存在するとき，$f(x)$ は $(a,b]$ で**広義積分可能**であるといい，
$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{a'\to a+0}\int_{a'}^b f(x)\,dx$$
と定義します．$[a,b)$ において $x=b$ が $f(x)$ の特異点の場合も同様に極限で定義します．

定義. (広義積分 (特異点が端点))

関数 $f(x)$ は区間 $(a,b]$ で定義されており，任意の a' $(a<a'<b)$ に対して $f(x)$ は $[a',b]$ 上有界で積分可能であるとする．定積分 $\displaystyle\int_{a'}^b f(x)\,dx$ の $a'\to a+0$ としたときの極限値が存在するとき $f(x)$ は $(a,b]$ 上**広義積分可能**であるといい，この極限値を $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ で表す．

$f(x)$ は区間 $I=[a,b]$ で $x=c$ を除いて定義され，$x=c$ が $f(x)$ の特異点であるとします．このとき区間 I を c で $[a,c)$, $(c,b]$ の 2 つに分けて，2 つの広義積分
$$\int_a^c f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon_1\to+0}\int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)\,dx,\quad \int_c^b f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon_2\to+0}\int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)\,dx$$
が<u>共に存在する</u>とき $f(x)$ は $[a,b]$ で**広義積分可能**であるといいこの極限値の和を $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ で表します．

定義. (広義積分 (特異点が内点))

$I=[a,b]$ とし，$c\in(a,b)$ とする．関数 $f(x)$ は $[a,b]$ で $x=c$ を除いて定義されているとする．広義積分 $\displaystyle\int_a^c f(x)\,dx$ 及び $\displaystyle\int_c^b f(x)\,dx$ が共に存在するとき $f(x)$ は $[a,b]$ で広義積分可能であるといい，

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$$

と定める．

また，広義積分可能ではないが極限の取り方を同一にして

$$\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx+\int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx$$

の $\varepsilon\to+0$ としたときの極限値が存在するとき，この値を**主値積分**といいます．$[a,b]$ に複数個の特異点を持つ場合はそれぞれの特異点で区間を分けて考えます．

(II) 無限区間での積分.

$f(x)$ は無限区間 $[a,\infty)$ で有限個の点を除いて定義されていて，任意の $R>a$ に対して (広義) 積分 $\displaystyle\int_a^R f(x)\,dx$ が存在するとします．このとき $R\to\infty$ としたときの極限値が存在するとき，$f(x)$ は $[a,\infty)$ で**広義積分可能**であるといい，

$$\int_a^\infty f(x)\,dx=\lim_{R\to\infty}\int_a^R f(x)\,dx$$

と定義します．無限区間 $(-\infty,a]$ の場合も同様に定義します．

定義. (広義積分 (片側無限区間))

関数 $f(x)$ は区間 $[a,\infty)$ で (有限個の点を除いて) 定義されていて任意の $R>a$ に対して (広義) 積分 $\displaystyle\int_a^R f(x)\,dx$ が存在するとする．定積分 $\displaystyle\int_a^R f(x)\,dx$ の $R\to\infty$ としたときの極限値が存在するとき $f(x)$ は $[a,\infty)$ で**広義積分可能**であるといい，この極限値を $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ で表す．

$f(x)$ が $(-\infty,\infty)$ で定義されていて，ある $a\in\mathbb{R}$ で

$$\int_{-\infty}^a f(x)\,dx=\lim_{L\to-\infty}\int_L^a f(x)\,dx,\quad \int_a^\infty f(x)\,dx=\lim_{R\to\infty}\int_a^R f(x)\,dx$$

が共に存在するとき $f(x)$ は $(-\infty,\infty)$ で**広義積分可能**であるといい，この極限値の和を $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$ で表します．

[広義積分の収束判定]

有界でない関数の積分や，無限区間での積分は広義積分として，定積分値の極限として定義しました．

関数 $f(x)$ は $x = a$ で特異点を持つとします．$f(x)$ は区間 $(a, b]$ で定義されており，任意の a' $(a < a' < b)$ に対して $f(x)$ は $[a', b]$ 上有界で積分可能であるとします．$\displaystyle\lim_{a' \to a} \int_{a'}^{b} f(x)\,dx$ が存在するとき

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{a' \to a+0} \int_{a'}^{b} f(x)\,dx$$

と定めます．

同様に関数 $f(x)$ は区間 $[a, \infty)$ で (有限個の点を除いて) 定義されていて任意の $R > a$ に対して (広義) 積分 $\displaystyle\int_a^R f(x)\,dx$ が存在するとします．$\displaystyle\lim_{R \to \infty} \int_a^R f(x)\,dx$ が存在するとき

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{R \to \infty} \int_a^R f(x)\,dx$$

と定めます．

この極限値が求められなくても，極限が存在するかどうかを調べることができます．

関数 $F(x)$ が $x \to a$ のとき収束することと

$$0 < |y - a| < |x - a| \text{ をみたす全ての } y \text{ について } x \to a \text{ のとき } |F(x) - F(y)| \to 0$$

は同値です．したがって $f(x)$ が区間 $(a, b]$ で定義されており $x = a$ が特異点のとき $a < y < x < b$ について $x \to a + 0$ のとき

$$\left| \int_y^x f(t)\,dt \right| \to 0$$

となるならば $f(x)$ は $(a, b]$ で広義積分可能であることがわかります．

関数 $f(x)$ について，$|f(x)|$ がある区間 I で広義積分可能であるとき，$f(x)$ は I 上**絶対積分可能**あるいは**絶対可積**といい，$f(x)$ の広義積分は区間 I で**絶対収束する**といいます．

$f(x)$ が I で絶対積分可能であるとき

$$0 \leq \left| \int_y^x f(t)\,dt \right| \leq \int_y^x |f(t)|\,dt$$

なので $f(x)$ は I で広義積分可能でもあります．したがって絶対収束する広義積分は収束します．収束するが絶対収束しない広義積分は**条件収束する**といいます．

広義積分が絶対収束するかどうかは次で判定することができます.

定理. (絶対収束の比較判定)

関数 $f(x)$ $\varphi(x)$ は $(a,b]$ 上 $|f(x)| \leq \varphi(x)$ をみたし，$x=a$ は $f(x)$ の特異点とする．広義積分 $\displaystyle\int_a^b \varphi(x)\,dx$ が収束すれば $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ は絶対収束する.

定理. (絶対収束の比較判定)

関数 $f(x)$ $\varphi(x)$ は $[a,\infty)$ 上 $|f(x)| \leq \varphi(x)$ をみたすとする．広義積分 $\displaystyle\int_a^\infty \varphi(x)\,dx$ が収束すれば $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ は絶対収束する.

$\varphi(x) = \dfrac{1}{x^\lambda}$ とすると $\lambda > 1$ のとき広義積分 $\displaystyle\int_a^\infty \frac{1}{x^\lambda}\,dx$ $(a>0)$ は

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^\lambda}\,dx = \frac{1}{(\lambda-1)a^{\lambda-1}}$$

と収束します.

$a>0$ とします．$x^\lambda f(x)$ が区間 $[a,\infty)$ で有界のときある定数 M が存在して，任意の $x \geq a$ に対して

$$\left|x^\lambda f(x)\right| \leq M$$

が成り立ちます．したがって $x \geq a$ のとき

$$|f(x)| \leq \frac{M}{x^\lambda}$$

をみたします．$\varphi(x) = \dfrac{M}{x^\lambda}$ として $\lambda > 1$ のとき

$$\int_a^\infty |f(x)|\,dx \leq \int_a^\infty \frac{M}{x^\lambda}\,dx = \frac{M}{(\lambda-1)a^{\lambda-1}} < \infty$$

となり $f(x)$ は区間 $[a,\infty)$ で絶対積分可能であることがわかります.

同様にして区間 $(a,b]$ で $x=a$ が特異点の場合でも $\varphi(x) = \dfrac{1}{(x-a)^\lambda}$ として $\lambda < 1$ のとき $f(x)$ が絶対収束することを示すことができます．これらをまとめて次が成り立ちます.

定理. (広義積分の絶対収束条件)

(1) $(a,b]$ において $x=a$ が $f(x)$ の特異点とする．ある $\lambda < 1$ に対して $(x-a)^\lambda f(x)$ が区間 (a,b) で有界ならば $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ は絶対収束する.

(2) ある $\lambda > 1$ に対して，$x^\lambda f(x)$ が区間 $[a,\infty)$ で有界ならば $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ は絶対収束する.

[多変数関数の連続性]

$f(x)$ を実数上の 1 変数関数とします．$f(x)$ が $x=a$ で連続であるとは

「x が a に限りなく近づくとき，$f(x)$ は $f(a)$ に限りなく近づく」

ことでした．したがって

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

が成り立つとき $f(x)$ は $x=a$ で連続でした．多変数関数の連続性は 1 変数関数のときと同様に極限を用いて定義されます．

$\mathbb{R}^n$ の点 $X=(x_1,\dots,x_n)$, $Y=(y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{R}^n$ に対して X, Y の距離 $d(X,Y)$ は

$$d(X,Y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}$$

です．$\mathbb{R}^n$ の点列 $\{X_m\}_{m=1}^{\infty}=\{X_1,X_2,\dots,X_m,\dots\}$ と点 $P\in\mathbb{R}^n$ に対して

$$\lim_{m\to\infty} d(X_m,P)=0$$

をみたすとき，点列 $\{X_m\}_{m=1}^{\infty}$ は点 P に**<u>収束する</u>**といい，

$$\lim_{m\to\infty} X_m = P \quad \text{あるいは} \quad X_m\to P \quad (m\to\infty)$$

で表します．

関数 $f(X)$ は集合 $D\subset\mathbb{R}^n$ 上で定義されているとし，$P\in\mathbb{R}^n$ は固定された点とします．$X=(x_1,\dots,x_n)\in D$ に対して $f(X)$ を $f(x_1,\dots,x_n)$ で表します．点 X が点 P に「限りなく近づく」ということは $d(X,P)\to 0$ となることです．このとき $f(X)$ が値 A に「限りなく近づく」とき $f(X)$ は A に**<u>収束する</u>**といい

$$\lim_{X\to P} f(X)=A \quad \text{あるいは} \quad f(X)\to A \quad (X\to P)$$

で表します．特に P が平面上の点のときは

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=A$$

のように表すこともあります．このときの $X=(x,y)$ の $P=(a,b)$ への近づき方は

$$d(X,P)=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}\to 0$$

となるもの**全て**です．特に $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ は

$$\lim_{x\to a}\left(\lim_{y\to b} f(x,y)\right) \ \text{や} \ \lim_{y\to b}\left(\lim_{x\to a} f(x,y)\right)$$

とは<u>異なります</u>．

関数 $f(X)$ は $D \subset \mathbb{R}^n$ 上定義されているとします．$P \in D$ に対して $f(X)$ が $f(P)$ に「限りなく近づく」とき $f(X)$ は $X = P$ で**連続**であるといいます．

定義. (連続関数)

関数 $f(X)$ は $X = P$ で**連続**である
$\iff$ 点 $X \in \mathbb{R}^n$ が D 内を動きながら P に限りなく近づくとき $f(X)$ は $f(P)$ に限りなく近づく．

これは次と同値です．

定理. (連続関数)

関数 $f(X)$ は $X = P$ で**連続**である $\iff \displaystyle\lim_{X \to P} f(X) = f(P)$ である．

関数 $f(X)$ が D 上の各点で連続のとき **D 上で連続**といいます．
多変数の連続関数に関しても 1 変数のときと同様なことが成り立ちます．

(1) $f(X), g(X)$ が $X = P$ で連続ならば

$$f(X) \pm g(X),\ cf(X),\ f(X)g(X),\ \frac{g(X)}{f(X)}\ (\text{ただし } f(P) \neq 0)$$

も $X = P$ で連続．ただし $c \in \mathbb{R}$ は定数．

(2) $f_i(X)$ たちは $D \subset \mathbb{R}^n$ 上連続であり，$\varphi(Y)$ は $E \subset \mathbb{R}^m$ 上連続とする．各 $X \in D$ に対して $(f_1(X), \ldots, f_m(X)) \in E$ ならば $\varphi(f_1(X), \ldots, f_m(X))$ も $X = P$ で連続．

関数 $f(X)$ は D 上定義されているとし，P の近くで有界とします．いま $X \in D$ が P に近づくとき $f(X)$ が A に収束するとします．このときどのように X が P に近づいても $f(X)$ は一定値 A に近づきます．したがって

X を P に近づける近づけ方が異なるとき，$f(X)$ が異なる値に近づく

とき $f(X)$ の $X \to P$ における極限が存在しないことがわかります．これより $X \to P$ のとき $f(X)$ が収束しないことを示すには

$f(X)$ が異なる値に収束するような 2 つの近づけ方を見つける

ことをします．

$X = (x_1, \ldots, x_n)$ が $P = (a_1, \ldots, a_n)$ に近づくとき X と P の距離

$$d = d(X, P) = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \cdots + (x_n - a_n)^2}$$

は 0 に近づくので $d \to 0$ のとき $f(X)$ が A に収束すれば極限が存在します．したがって P を中心とする極座標を考えて，P からの距離 r が $r \to 0$ のとき偏角 $\theta, \varphi, \ldots$ によらずに $f(X)$ が A に収束すれば $f(X) \to A$ がわかります．

特に $\mathbb{R}^2$ で $P = (0, 0)$ のときは

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$$

とおいて $\theta = \theta(r)$ (r の関数; 定数とは限らない) がどのような値をとっても，つまり $\cos\theta, \sin\theta$ がどのように変化しようとも，$r \to 0$ でさえあれば $f(x, y) \to A$ となることを示します．

[多変数関数の導関数]

多変数関数の微分について考えます．$y = f(X) = f(x_1, \ldots, x_n)$ を点 $P = (a_1, \ldots, a_n)$ の近くで定義された変数 $x_1, \ldots, x_n$ の関数とします．点 $P = (a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n)$ に対して x_i 方向の増分の極限

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1}, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_n)}{h}$$

が存在すればこれを関数 $f(X)$ の点 P における **x_i 方向偏微分係数**といい $f_{x_i}(P)$ や $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(P)$ と表します．このとき点 P に対して f の x_i 方向微分係数を対応させる関数を $y = f(X)$ の **x_i 方向偏導関数**といい $f_{x_i}(X)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(X)$, $\dfrac{\partial y}{\partial x_i}$ などで表します.

特に 2 変数関数 $z = f(x, y)$ のときは

$$f_x(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}, \quad f_y(x, y) = \lim_{k \to 0} \frac{f(x, y + k) - f(x, y)}{k}$$

となります．この定義を見てわかる通り x_i 方向偏微分では x_i 以外の変数は動いていません．したがって x_i 方向微分では，x_i 以外の変数を定数と見て，x_i についての関数として 1 変数関数の微分を行うことと同じになります.

$f(X)$ の偏導関数もまた X の関数ですからさらに偏微分することができることもあります．このように偏微分を繰り返して高階偏導関数が定義されます．2 変数関数 $f(x, y)$ に対しては 2 階偏導関数は

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\ f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x},\ f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y},\ f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

の 4 通りがあります.

ここで記号 $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ は x_i 方向に偏微分可能な関数 $f(X)$ に対して，その偏導関数

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f(X) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(X) = f_{x_i}(X)$$

を対応させる写像とみることができます．この意味で

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(X) = \frac{\partial}{\partial y} \circ \left(\frac{\partial}{\partial x} f \right)(X)$$

は関数 $f(X)$ の x 方向偏導関数 $f_x(X) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(X)$ を y 方向に偏微分した偏導関数

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} f(X) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(X) \right) = \frac{\partial}{\partial y} f_x(X) = \frac{\partial f_x}{\partial y}(X) = (f_x)_y(X) = f_{xy}(X)$$

を表します.

関数 $f(X)$ が D 上で定義されていて n 階までのあらゆる偏導関数が存在し，それらが全て連続であるとき $f(X)$ は **C^n 級**であると言います．$f(X)$ が C^n 級であるとき $f(X)$ の n 階までの偏導関数は微分する順序によりません．特に 2 変数関数 $f(x, y)$ が C^2 級なら

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$$

となります．さらに $f(x, y)$ が C^n 級なら $0 \leq k \leq n$ なる任意の整数 k に対して k 階偏導関数は

$$\frac{\partial^k f}{\partial x^r \partial y^{k-r}}(x, y)$$

の形に表されます.

[勾配，発散，回転]

$f(x,y,z)$ を $\mathbb{R}^3$ 上の C^1 級関数とします．このとき $f(x,y,z)$ の偏導関数を並べてできる $\mathbb{R}^3$ への関数

$$\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix}(x,y,z) = \begin{pmatrix} f_x(x,y,z) \\ f_y(x,y,z) \\ f_z(x,y,z) \end{pmatrix}$$

を $f(x,y,z)$ の**勾配**といい $\operatorname{grad} f$ で表します．基本ベクトルを $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ とするとき

$$\operatorname{grad} f = \boldsymbol{e}_1 \frac{\partial f}{\partial x} + \boldsymbol{e}_2 \frac{\partial f}{\partial y} + \boldsymbol{e}_3 \frac{\partial f}{\partial z} = \left(\boldsymbol{e}_1 \frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{e}_2 \frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{e}_3 \frac{\partial}{\partial z} \right) f$$

と表されるので grad は $\boldsymbol{e}_1 \dfrac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{e}_2 \dfrac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{e}_3 \dfrac{\partial}{\partial z}$ と対応します．これを ∇ (ナブラ) で表します．したがって勾配は

$$\operatorname{grad} f = \nabla f$$

と表すことができます．

$A_1(x,y,z)$, $A_2(x,y,z)$, $A_3(x,y,z)$ を $\mathbb{R}^3$ 上の C^1 級関数とし，$\boldsymbol{A}(x,y,z) = \begin{pmatrix} A_1(x,y,z) \\ A_2(x,y,z) \\ A_3(x,y,z) \end{pmatrix}$ を $\mathbb{R}^3$ へのベクトル値関数とします．このとき ∇ と $\boldsymbol{A}$ との内積で表される関数

$$\begin{aligned}(\nabla \cdot \boldsymbol{A})(x,y,z) &= \left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z} \right)(x,y,z) \\ &= \frac{\partial A_1}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial A_2}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial A_3}{\partial z}(x,y,z)\end{aligned}$$

をベクトル値関数 $\boldsymbol{A}(x,y,z)$ の**発散**といい $\operatorname{div} \boldsymbol{A}$ で表します．したがって

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = \nabla \cdot \boldsymbol{A}$$

と表されます．

また ∇ と $\boldsymbol{A}(x,y,z)$ との外積で表されるベクトル値関数

$$(\nabla \times \boldsymbol{A}) = \left(\boldsymbol{e}_1 \left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} \right) + \boldsymbol{e}_2 \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} \right) + \boldsymbol{e}_3 \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \right) \right)$$

をベクトル値関数 $\boldsymbol{A}$ の**回転**といい $\operatorname{rot} \boldsymbol{A}$ で表します．したがって

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{A} = \nabla \times \boldsymbol{A}$$

と表されます．

$\mathbb{R}^3$ 上の C^2 級関数 $f(x,y,z)$ に対して $\operatorname{grad} f(x,y,z)$ はベクトル値関数なのでこの発散をとると $\mathbb{R}^3$ 上の関数になります．このとき

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \nabla \cdot \left(\boldsymbol{e}_1 \frac{\partial f}{\partial x} + \boldsymbol{e}_2 \frac{\partial f}{\partial y} + \boldsymbol{e}_3 \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) f$$

となります．この $\operatorname{div} \operatorname{grad}$ を $\triangle$ で表し**ラプラシアン**といいます．したがって

$$\triangle = \operatorname{div} \operatorname{grad} = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

です．

[連鎖公式]

1 変数関数 $y = f(x)$, $x = g(t)$ に対して，この合成関数を $y = h(t) = f(g(t))$ とします．$g(t)$ が $t = a$ で微分可能で $f(x)$ が $x = g(a)$ で微分可能のとき $h(t)$ は $t = a$ で微分可能で，その微分係数は

$$\frac{dh}{dt}(a) = \frac{df}{dx}(g(a))\frac{dg}{dt}(a)$$

となりました．$y = h(t) = f(g(t))$, $x = g(t)$ ですからこれは形式的に

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}$$

と表されます．このような合成関数の導関数は多変数関数でも同様なことが成り立ちます．

$z = f(x, y)$ を C^1 級の 2 変数関数とし，$x = x(t)$, $y = y(t)$ は t の関数とします．このとき $g(t) = f(x(t), y(t))$ として $z = g(t)$ は t の 1 変数関数とみることができます．

$x = x(t)$, $y = y(t)$ は $t = t_0$ で微分可能とすると $x(t)$, $y(t)$ は $t = t_0$ で連続です．したがって

$$\Delta x = x(t_0 + h) - x(t_0), \quad \Delta y = y(t_0 + h) - y(t_0)$$

とおくと $h \to 0$ のとき $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ となります．このとき

$$\begin{aligned}
&\frac{g(t_0 + h) - g(t_0)}{h} = \frac{f(x(t_0 + h), y(t_0 + h)) - f(x(t_0), y(t_0))}{h} \\
&= \frac{f(x(t_0 + h), y(t_0 + h)) - f(x(t_0), y(t_0 + h)) + f(x(t_0), y(t_0 + h)) - f(x(t_0), y(t_0))}{h} \\
&= \frac{f(x(t_0) + \Delta x, y(t_0 + h)) - f(x(t_0), y(t_0 + h))}{\Delta x} \cdot \frac{x(t_0 + h) - x(t_0)}{h} \\
&\quad + \frac{f(x(t_0), y(t_0) + \Delta y) - f(x(t_0), y(t_0))}{\Delta y} \cdot \frac{y(t_0 + h) - y(t_0)}{h}
\end{aligned}$$

なので

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(t_0 + h) - g(t_0)}{h} = f_x(x(t_0), y(t_0))x'(t_0) + f_y(x(t_0), y(t_0))y'(t_0)$$

となります．

定理．(合成関数の微分：1 変数制限)

関数 $z = f(x, y)$ は領域 D で C^1 級とする．関数 $x = x(t)$, $y = y(t)$ は共に区間 I で微分可能で任意の $t \in I$ に対して $(x(t), y(t)) \in D$ であるする．このとき $z(t) = f(x(t), y(t))$ は I 上微分可能で，導関数 $\dfrac{dz}{dt}(t)$ は次のようになる．

$$\frac{dz}{dt}(t) = f_x(x(t), y(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t))y'(t) = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}(t) + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}(t).$$

この定理の式は t の関数としての等式です．

2 変数関数 $z = f(x, y)$ に対して $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ を u, v を変数とする 2 変数関数とします．このとき

$$z = g(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$$

として z を u, v の 2 変数関数とみることができます．x, y が $(u, v) = (u_0, v_0)$ の近くで偏微分可能で，$(x_0, y_0) = (x(u_0, v_0), y(u_0, v_0))$ とします．また $f(x, y)$ は $(x, y) = (x_0, y_0)$ の近くで C^1 級とします．すると先の結果によって z は $v = v_0$ を定数とみて u の関数として (u_0, v_0) で偏微分可能で

$$\frac{\partial z}{\partial u} = f_x(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0))x_u(u_0, v_0) + f_y(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0))y_u(u_0, v_0)$$

であり，同様にして

$$\frac{\partial z}{\partial v} = f_x(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0))x_v(u_0, v_0) + f_y(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0))y_v(u_0, v_0)$$

となります．したがって次が成り立ちます．

定理. (合成関数の微分：変数変換，連鎖公式)

2 変数関数 $z = f(x, y)$ は領域 D で C^1 級とする．2 変数関数 $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ は共に領域 Ω で偏微分可能で Ω 内の各点 (u, v) に対して $(x(u, v), y(u, v)) \in D$ であるとする．このとき $z = f(x(u, v), y(u, v))$ は (u, v) について偏微分可能で偏導関数 z_u, z_v はそれぞれ次のようになる．

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial u} &= z_u = f_x(x, y)x_u(u, v) + f_y(x, y)y_u(u, v) = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}. \\
\frac{\partial z}{\partial v} &= z_v = f_x(x, y)x_v(u, v) + f_y(x, y)y_v(u, v) = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}.
\end{aligned}$$

$z = f(x, y)$ は C^2 級とし，$x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ も C^2 級とします．$f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$ を u で偏微分すると連鎖公式より

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_x}{\partial u} &= \frac{\partial f_x}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f_x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = f_{xx}(x, y)x_u(u, v) + f_{xy}(x, y)y_u(u, v), \\
\frac{\partial f_y}{\partial u} &= \frac{\partial f_y}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f_y}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = f_{yx}(x, y)x_u(u, v) + f_{yy}(x, y)y_u(u, v)
\end{aligned}$$

となります．したがって z を u で 2 回偏微分すると，z が C^2 級なので

$$\begin{aligned}
z_{uu} = \frac{\partial z_u}{\partial u} &= \frac{\partial}{\partial u}(f_x x_u + f_y y_u) = \frac{\partial f_x}{\partial u}x_u + f_x\frac{\partial x_u}{\partial u} + \frac{\partial f_y}{\partial u}y_u + f_y\frac{\partial y_u}{\partial u} \\
&= (f_{xx}x_u + f_{xy}y_u)x_u + f_x x_{uu} + (f_{yx}x_u + f_{yy}y_u)y_u + f_y y_{uu} \\
&= f_{xx}x_u^2 + 2f_{xy}x_u y_u + f_{yy}y_u^2 + f_x x_{uu} + f_y y_{uu}
\end{aligned}$$

となります．

[累次積分]

多変数関数 $f(x,y)$ の偏導関数を各変数ごとに考えたように $f(x,y)$ の定積分も各変数ごとに考えます．つまり 1 つの変数に注目し，その他の変数を定数と見て 1 変数関数の定積分を行います．

1 変数関数 $f(x)$ の区間 $I=[a,b]$ 上の定積分は $f(x)$ の原始関数 $F(x)$ を用いて

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$$

で与えられました．これを全ての変数に対して行い，$f(x,y)$ の定積分を定めます．

D を $\mathbb{R}^2$ の集合で，ある $R>0$ が存在して

$$D \subset \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le R\}$$

をみたすとします．この条件をみたすとき D は**有界**であるといいます．

D は有界な閉集合とし，ある連続関数 $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ で

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid a\le x\le b, \varphi_1(x)\le y\le \varphi_2(x)\}$$

と表されるとします．また $f(x,y)$ は D 上定義された連続関数とします．

$I=[a,b]$ とし $x_0\in I$ を 1 つ定めるごとに y は $\varphi_1(x_0)\le y\le\varphi_2(x_0)$ の範囲を動きます．y についての 1 変数関数 $g_{x_0}(y)=f(x_0,y)$ は連続なので区間 $[\varphi_1(x_0),\varphi_2(x_0)]$ 上積分可能です．したがって定積分

$$F(x_0)=\int_{\varphi_1(x_0)}^{\varphi_2(x_0)} g_{x_0}(y)\,dy = \int_{\varphi_1(x_0)}^{\varphi_2(x_0)} f(x_0,y)\,dy$$

が定義できます．このとき関数 $F(x)$ は $I=[a,b]$ 上連続になるので I 上積分可能です．そこで $F(x)$ を I 上で定積分して

$$\int_a^b F(x)\,dx = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\right)dx$$

が定まります．この値を $f(x,y)$ の D における**重積分**といい，これを

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

で表します．またこのように重積分を計算する方法を**累次積分**と呼びます．

重積分の計算は１変数の積分に帰着して順次積分計算を行います.

定理. (累次積分)

$\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ は $I = [a, b]$ 上の連続関数で，I 上 $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$ をみたすとする．また

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in I,\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\right\}$$

を連続関数で挟まれた集合とする．

D 内部で有界かつ連続な関数 $f(x, y)$ に対して $f(x, y)$ は D 上積分可能で，次が成り立つ．

(1) $F(x) = \displaystyle\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy$ は I 上連続.

(2) $\displaystyle\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b F(x)\, dx = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy\right) dx.$

この右辺を

$$\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \text{ または } \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx$$

のようにも表します.

集合 D 上で (x, y) 平面と $f(x, y)$ で囲まれる部分を V とすると V の平面 $x = x_0$ での切り口の面積は $F(x_0) = \displaystyle\int_{\varphi_1(x_0)}^{\varphi_2(x_0)} f(x_0, y)\, dy$ です．これを $a \leq x_0 \leq b$ で足し合わせたものが V の体積で，

$$\int_a^b F(x)\, dx = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy\right) dx$$

であることを表しています.

V を平面 $y = y_0$ で切ったときの断面積を y_0 の動く範囲で足し合わせても V の体積を求めることができます．したがって累次積分の順番を変更しても同じ値になります．よって次も成り立ちます.

$\psi_1(y), \psi_2(y)$ は $J = [c, d]$ 上の連続関数で，J 上 $\psi_1(y) \leq \psi_2(y)$ をみたし，集合 D が

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in J,\ \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\right\}$$

となるならば

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\, dx\right) dy$$

となります.

実際には計算しやすいようにうまく積分する順番を決めましょう.

[重積分の変数変換]

区間 $I=[a,b]$ 上 $f(x)$ は連続で $f(x)\geq 0$ とします．このとき $f(x)$ の I での積分値はグラフ $y=f(x)$ で囲まれる部分 $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid a\leq x\leq b,\ 0\leq y\leq f(x)\}$ の面積でした．

$D\subset\mathbb{R}^2$ を有界閉集合，$f(x,y)$ は D 上連続で $f(x,y)\geq 0$ とします．このとき重積分も同様にして $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ は D 上 $z=f(x,y)$ と挟まれる部分 $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid (x,y)\in D,\ 0\leq z\leq f(x,y)\}$ の体積を表します．1 変数関数の区分求積法と同様に D の微小長方形 $\Delta D=\{(x_0+s\Delta x, y_0+t\Delta y) \mid 0\leq s\leq 1, 0\leq t\leq 1\}$ を底面積とし，高さ $f(x_0,y_0)$ の直方体の体積の和の $(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)$ のときの極限として求められます．

このとき C^1 級関数で $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$ と変換します．この変換 $\Phi\colon (u,v)\to(x,y)$ についての D の逆像を $E=\Phi^{-1}(D)$ とし，Φ は E の内部を D の内部の上に 1 対 1 に写すとします．

$$\Delta E=[u_0,u_0+\Delta u]\times[v_0,v_0+\Delta v]=\{(u_0+s\Delta u, v_0+t\Delta v) \mid 0\leq s,t\leq 1\}$$

とすると Φ は上への 1 対 1 写像ですから $\Delta D=\Phi^{-1}(\Delta E)=\{(u,v) \mid \Phi(u,v)\in D\}$ は

$$\Delta D=\{(x(u_0+s\Delta u, v_0+t\Delta v), y(u_0+s\Delta u, v_0+t\Delta v) \mid 0\leq s,t\leq 1\}$$

と表されます．また $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$ は C^1 級なので $P=(u_0,v_0)$ として

$$x(u_0+s\Delta u, v_0+t\Delta v)-x(P)=s\frac{\partial x}{\partial u}(P)\Delta u+t\frac{\partial x}{\partial v}(P)\Delta v+\varepsilon_1\sqrt{s^2\Delta u^2+t^2\Delta v^2},$$
$$y(u_0+s\Delta u, v_0+t\Delta v)-y(P)=s\frac{\partial y}{\partial u}(P)\Delta u+t\frac{\partial y}{\partial v}(P)\Delta v+\varepsilon_2\sqrt{s^2\Delta u^2+t^2\Delta v^2}$$

とすると $(\Delta u,\Delta v)\to(0,0)$ のとき $\varepsilon_i\to 0$ をみたします．このとき ΔD は $0\leq s,t\leq 1$ の範囲を動くときの平行四辺形 $s\Delta u\begin{pmatrix}\partial x/\partial u(P)\\ \partial y/\partial u(P)\end{pmatrix}+t\Delta v\begin{pmatrix}\partial x/\partial v(P)\\ \partial y/\partial v(P)\end{pmatrix}$ の面積と思えますから ΔD の面積はおよそ

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0)\frac{\partial y}{\partial v}(u_0,v_0)-\frac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0)\frac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0)\right)\Delta u\Delta v$$

となります．この $\Delta u\Delta v$ の係数を $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(P)$ で表して，変数変換 Φ の P における**関数行列式**または**ヤコビアン**といいます．

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(P)=\frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0)\frac{\partial y}{\partial v}(u_0,v_0)-\frac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0)\frac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0)$$

これはつまり，集合 E の分割を $(\Delta u,\Delta v)$ と取ったとき，元の集合の $\Phi(P)$ の近くでの面積は元の (u,v) 平面での面積 $\Delta E=\Delta u\Delta v$ のヤコビアン倍となります．したがって

$$f(x_0,y_0)\Delta D\approx f(x(u_0,v_0),y(u_0,v_0))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(P)\right|\Delta E$$

が成り立つことが分かります．これより変数変換 $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$ で重積分は

$$\begin{aligned}\iint_D f(x,y)\,dx\,dy&=\iint_E f(x,y)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\,du\,dv\\&=\iint_E f(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\,du\,dv\end{aligned}$$

となります．

[重積分の変数変換]

$E \subset \mathbb{R}^2$ を (u,v) 平面内の連続関数で挟まれた集合とし，$x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ は E 上の C^1 級関数とします．この変数変換 $\Phi\colon (u,v) \to (x,y)$ で E の内部が (x,y) 平面内の集合

$$D = \Phi(E) = \{\Phi(u,v) = (x(u,v), y(u,v)) \in \mathbb{R}^2 \mid (u,v) \in E\}$$

の内部の上に 1 対 1 に写すとします．このとき

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \partial x/\partial u & \partial x/\partial v \\ \partial y/\partial u & \partial y/\partial v \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}$$

が変数変換 Φ の**関数行列式**または**ヤコビアン**です.

定理. (重積分の変数変換)

$x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ は C^1 級で変数変換 $\Phi = (x,y)\colon E \to D$ は上への写像で E の内部を D の内部へ *1* 対 *1* にうつすとし，E の内部で $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0$ とする．このとき次が成り立つ.

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_E f(x(u,v), y(u,v)) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv.$$

1 変数の積分の変数変換 $x = \varphi(t)$ で

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\frac{dx}{dt}\,dt = \int f(\varphi(t))\frac{d\varphi}{dt}\,dt$$

となったように 2 変数 $x = \varphi(u,v)$, $y = \psi(u,v)$ でも

$$\iint f(x,y)\,dx\,dy = \iint f(\varphi(u,v), \psi(u,v)) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv$$

となります．ヤコビアンだけでなく，変換後の像の「向き」によって符号が変化してしまうのでヤコビアンの絶対値も必要になることに注意しましょう.

主な変数変換.

(I) 1 次変換 $x = au + bv$, $y = cu + dv$.

$ad - bc \neq 0$ のとき $u = \dfrac{dx + ay}{ad - bc}$, $v = -\dfrac{bx + cy}{ad - bc}$ となり (u,v) から (x,y) への変換は $\mathbb{R}^2$ 上全単射です．またヤコビアンは

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \partial x/\partial u & \partial x/\partial v \\ \partial y/\partial u & \partial y/\partial v \end{vmatrix} = ad - bc$$

ですからこの変数変換で形式的に $dx\,dy = |ad - bc|\,du\,dv$ となります.

(II) 極座標変換 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ $(r \geq 0)$.

この変換は (r,θ) 平面 $\mathbb{R}^2$ から (x,y) 平面 $\mathbb{R}^2$ への写像で

$$E^\circ = \{(r,\theta) \mid 0 < r, 0 < \theta < 2\pi\} \subset \mathbb{R}^2(r,\theta)$$

から $\mathbb{R}^2(x,y) \setminus \{(x,0) \mid x \geq 0\}$ への全単射な C^∞ 級の変換です．このときヤコビアンは

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \partial x/\partial u & \partial x/\partial v \\ \partial y/\partial u & \partial y/\partial v \end{vmatrix} = \cos\theta r\cos\theta - (-r\sin\theta)\sin\theta = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r$$

となり，いま $r > 0$ においてこの変数変換で形式的に $dx\,dy = r\,dr\,d\theta$ となります.

[広義重積分]

関数 $f(x,y)$ が D 上有界でない場合や，D が有界集合でない場合の重積分も定義できます．1 変数の場合と同様に，積分可能な集合 $K \subset D$ を考えて，K を D に近づけた極限として定義します．

１変数の場合，区間 $I=(a,b)$ に対して I に含まれる閉区間 $[a+\varepsilon, b-\delta] \subset (a,b)$ $(\varepsilon, \delta > 0)$ を考えて $\varepsilon \to +0, \delta \to +0$ という極限をとりました．このとき閉区間 $[a+\varepsilon, b-\delta]$ は ε, δ に関して単調に I に近づき，どんな閉区間 $J \subset I$ に対しても十分小さな ε, δ をとると $J \subset [a+\varepsilon, b-\delta]$ となります．平面上の点集合 D に対しても同様に集合の極限を定めます．

定義. (近似列)

平面上の点集合 D に対して，集合の列 $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ が D の**近似列**である．
$\iff$ $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ は次をみたす．

(1) $K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset K_n \subset \cdots \subset D$,

(2) 各 K_n は有界閉集合,

(3) D 内の任意の有界閉集合 K に対してある n が存在して $K \subset K_n$ となる．

$\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ が D の近似列であるとき，

K_n は単調に増加して D に近づき，

D に含まれるどんな有界閉集合 K も十分大きな n をとると K は K_n に含まれる

ようにできます．

例えば $D=\{(x,y) \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ (x,y) \neq (0,0)\}$ とします．このとき

$$K_n = \left\{(x,y) \mid x^2+y^2 \geq \frac{1}{n^2}\right\}$$

は D の近似列となります．しかし

$$L_n = \left\{(x,y) \mid x \geq \frac{1}{n},\ y \geq 0\right\}$$

は D の近似列になりません．$K \subset D$ を $K=\{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 2\}$ とすると K は有界閉集合です．しかし点 $P=(0,1) \in K$ で $P \notin L_n$ なのでどんな n に対しても $K \not\subset L_n$ です．これはつまり，y 軸上の点が L_n の極限点になっていて $n \to \infty$ のとき L_n の極限が $\{(x,y) \mid x>0, y \geq 0\}$ となり，原点だけでなく y 軸まで抜けてしまうことによります．近似列を取るときは，極限となる部分が D で除かれる部分になるように選びます．

D 内の任意の有界閉集合 K に対して $f(x,y)$ が K 上積分可能のとき $f(x,y)$ は D で**局所積分可能**であるといいます．

D の近似列 $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ の取り方によらない一定の有限な極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\iint_{K_n} f(x,y)\,dx\,dy$ が存在するとき $f(x,y)$ は D 上で**広義積分可能**であるといい，この極限値を $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ で表します．また，このとき広義積分 $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ は**収束する**といいます．

広義積分の収束判定に関して，次が成り立ちます.

定理. (定符号関数の広義積分の収束判定)

$D \subset \mathbb{R}^2$ を集合とし，$f(x,y)$ は D で局所積分可能とする．$f(x,y)$ が D 上定符号のとき，D の 1 つの近似列 $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\iint_{K_n} f(x,y)\,dx\,dy$ が存在すれば $f(x,y)$ は D 上広義積分可能で $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{n\to\infty}\iint_{K_n} f(x,y)\,dx\,dy$ である.

したがって近似列の極限となる部分の近くで定符号のときも，その定符号となる部分の 1 つの近似列で極限値が存在すれば広義積分可能です.

広義積分に関しても累次積分が可能です.

定理. (広義積分の累次積分)

$\varphi_1(x) \le \varphi_2(x)$ は区間 (a,b) 上連続とし，

$$D = \{(x,y) \mid a < x < b, \varphi_1(x) < y < \varphi_2(x)\}$$

を連続関数で挟まれた集合とする．D 上局所積分可能な関数 $f(x,y)$ が D 上定符号で $\displaystyle\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy$ が連続ならば

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx.$$

これは $a = -\infty, b = \infty$ でも成り立つ.

定符号ではない関数では近似列の取り方によって極限が異なることがあります．これは 1 変数関数のとき $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $I = [-1,0) \cup (0,1]$ に対して I の近似列

$$K_n = \left\{-1 \le x \le -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \le x \le 1\right\}, \quad L_n = \left\{-1 \le x \le -\frac{1}{2n}, \frac{1}{n} \le x \le 1\right\}$$

をとると

$$\lim_{n\to\infty}\int_{K_n} f(x)\,dx = 0, \quad \lim_{n\to\infty}\int_{L_n} f(x)\,dx = -\log 2$$

となることに相当します.

定符号ではない一般の関数に関しては次が成り立ちます.

定理. (広義積分の収束判定)

近似列 $\{K_n\}$ をもつ点集合 D 上で局所積分可能な関数 $f(x,y)$ に対して，次は同値.

(1) $f(x,y)$ は D 上広義積分可能.

(2) $|f(x,y)|$ は D 上広義積分可能.

[三重積分]

平面上の集合を長方形に分割したように，空間内の集合を直方体に分割して三重積分が定義されます．空間内の集合 V 上での関数 $f(x,y,z)$ の三重積分を $\displaystyle\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ のように表します．このときも重積分と同様に変数変換をして累次積分によって求めることができます．

(I) 累次積分

$V = \{a \le x \le b,\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x),\ \psi_1(x,y) \le z \le \psi_2(x,y)\}$ を空間内の連続関数で挟まれた集合，$f(x,y,z)$ を V の内部で連続な関数とします．V の (x,y) 平面への射影を $D = \{(x,y) \mid$ ある z で $(x,y,z) \in V\}$ とします．V の点は $(x,y) \in D$ に対して $\psi_1(x,y) \le z \le \psi_2(x,y)$ と表されるので V での $f(x,y,z)$ の積分は D 上の関数

$$\widetilde{F}(x,y) = \int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz$$

の D での重積分

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_D \widetilde{F}(x,y)\,dx\,dy = \iint_D \left(\int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right) dx\,dy$$

となります．したがって

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left(\int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right) dy\right) dx$$

となります．これを単に次のように表すこともあります．

$$\int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx,\quad \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz$$

また V の平面 $x = x_0$ での切り口を $V_{x_0} = V \cap \{x = x_0\} = \{(x_0,y,z) \in V\}$ とします．このとき V での $f(x,y,z)$ の積分は V_{x_0} での (y,z) の関数 $f(x_0,x,y)$ の積分値

$$F(x_0) = \iint_{V_{x_0}} f(x_0,y,z)\,dy\,dz$$

の $a \le x_0 \le b$ にわたる積分値

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b F(x)\,dx = \int_a^b \left(\iint_{V_x} f(x,y,z)\,dy\,dz\right) dx$$

となります．

(II) 変数変換

(u, v, w) 空間から (x, y, z) 空間への変数変換

$$\Phi\colon x = x(u, v, w),\ y = y(u, v, w),\ z = z(u, v, w)$$

によって V が W に1対1に写されるとき V 上の $f(x, y, z)$ の三重積分はヤコビアンを

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \partial x/\partial u & \partial x/\partial v & \partial x/\partial w \\ \partial y/\partial u & \partial y/\partial v & \partial y/\partial w \\ \partial z/\partial u & \partial z/\partial v & \partial z/\partial w \end{vmatrix}$$

として

$$\iiint_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_W f(\Phi(u, v, w)) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du\,dv\,dw$$

となります.

主な変数変換.

(1) 円柱座標 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ z = z,\ (r \geq 0)$

このとき

$$\begin{aligned} &\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta, && \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r\sin\theta, && \frac{\partial x}{\partial z} = 0, \\ &\frac{\partial y}{\partial r} = \sin\theta, && \frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos\theta, && \frac{\partial y}{\partial z} = 0, \\ &\frac{\partial z}{\partial r} = 0, && \frac{\partial z}{\partial \theta} = 0, && \frac{\partial z}{\partial z} = 1 \end{aligned}$$

なので

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = r$$

です. したがってこの変数変換によって形式的に

$$dx\,dy\,dz = r\,dr\,d\theta\,dz$$

となります.

(2) 極座標 $x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ z = r\cos\theta,\ (r \geq 0,\ 0 \leq \theta \leq \pi,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi)$

このとき

$$\begin{aligned} &\frac{\partial x}{\partial r} = \sin\theta\cos\varphi, && \frac{\partial x}{\partial \theta} = r\cos\theta\cos\varphi, && \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -r\sin\theta\sin\varphi, \\ &\frac{\partial y}{\partial r} = \sin\theta\sin\varphi, && \frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos\theta\sin\varphi, && \frac{\partial y}{\partial \varphi} = r\sin\theta\cos\varphi, \\ &\frac{\partial z}{\partial r} = \cos\theta, && \frac{\partial z}{\partial \theta} = -r\sin\theta, && \frac{\partial z}{\partial \varphi} = 0 \end{aligned}$$

なので

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = r^2\sin\theta$$

です. この変数変換によって形式的に

$$dx\,dy\,dz = r^2|\sin\theta|\,dr\,d\theta\,d\varphi$$

となります. いま $0 \leq \theta \leq \pi$ なので $\sin\theta \geq 0$ ですから

$$dx\,dy\,dz = r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi$$

です.

[積分の応用]

(I) 曲線の長さ.

$I=[\alpha,\beta]$ とし，I 上の連続関数 $x(t), y(t)$ を考えます．このとき $\boldsymbol{r}(t)=(x(t),y(t))$ は $\alpha\le t\le\beta$ において 2 点 $A=\boldsymbol{r}(\alpha)$, $B=\boldsymbol{r}(\beta)$ を結ぶ曲線 C を表します．この曲線 C の長さ L を次のように定めます.

I の分割 $\Delta\colon \alpha=t_0<\cdots<t_n=\beta$ に対して C の分割 $\{P_i=\boldsymbol{r}(t_i)\}_{i=0}^n$ を取り，2 点 P_{i-1}, P_i 間の距離の i についての和を $L[\Delta]$ とします．分割の幅 $|\Delta|=\max\{t_i-t_{i-1}\mid 1\le i\le n\}$ を 0 に近づけたとき $L[\Delta]$ の極限が存在するならば，その極限値

$$L=\lim_{|\Delta|\to 0}\left(\sum_{i=1}^n\sqrt{(x(t_{i-1})-x(t_i))^2+(y(t_{i-1})-y(t_i))^2}\right)$$

を C の長さと定めます．$x(t)$, $y(t)$ が共に C^1 級のときは C の長さ L は

$$L=\int_\alpha^\beta\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,dt$$

と表されます．また $f(x)$ を C^1 級関数として，$y=f(x)$ $(\alpha\le x\le\beta)$ や極形式 $r=f(\theta)$ $(\alpha\le\theta\le\beta)$ と表されるときは，それぞれ

$$L=\int_\alpha^\beta\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx,\quad L=\int_\alpha^\beta\sqrt{f(\theta)^2+f'(\theta)^2}\,d\theta$$

となります.

(II) 極形式で表された図形の面積.

$r=f(\theta)$ と表された曲線の原点と $\theta=\alpha$, $\theta=\beta$ で囲まれた部分 D の面積を考えます.

区間 $I=[\alpha,\beta]$ の分割 $\Delta\colon \alpha=t_0<\cdots<t_n=\beta$ に対して小区間 $I_k=[t_{k-1},t_k]$ の点 $c_k\in I_k$ を取ります．このとき半径 $f(c_k)$, 角 t_k-t_{k-1} の扇形の面積は $\dfrac{1}{2}f(c_k)^2(t_k-t_{k-1})$ ですから，D の面積 S を極限値

$$S=\lim_{|\Delta|\to 0}\sum_{k=1}^n\frac{1}{2}f(c_k)^2(t_k-t_{k-1})$$

で定義します．したがって

$$S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f(\theta)^2\,d\theta=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2\,d\theta$$

となります.

[体積，曲面積]

(I) 体積.

空間内の (体積確定な) 有界集合 V の体積 M は三重積分を用いて $M = \iiint_V dx\,dy\,dz$ と表されます．特に V が $a \leq x \leq b$ に含まれるときは

$$M = \int_a^b \left(\iint_{V_x} dy\,dz \right) dx = \int_a^b S_x\,dx$$

となります．ここで S_{x_0} は平面 $x = x_0$ での V の切り口 V_{x_0} の面積です．同様に V が $(x, y) \in D$, $\psi_1(x, y) \leq z \leq \psi_2(x, y)$ と表される時は次のようになります.

$$M = \iint_D \left(\int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} dz \right) dx\,dy = \iint_D (\psi_2(x, y) - \psi_1(x, y))\,dx\,dy.$$

(x, y) 平面上の $y \geq 0$ の部分にある集合 D を x 軸の周りに一回転してできる回転体 V の体積は次で与えられます.

$$M = 2\pi \iint_D y\,dx\,dy.$$

(II) 曲面積.

(x, y)-平面上の連続関数で挟まれた集合 D 上で C^1 級関数 $f(x, y)$ によって $z = f(x, y)$ で定義される曲面 S の面積 $|S|$ は

$$|S| = \iint_D \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\,dx\,dy = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\,dx\,dy$$

と表されます．D が極座標で $\alpha \leq \theta \leq \beta$, $r_1(\theta) \leq r \leq r_2(\theta)$ と表されている場合は次のようになります.

$$|S| = \int_\alpha^\beta \left(\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} r\sqrt{1 + z_r^2 + \frac{1}{r^2} z_\theta^2}\,dr \right) d\theta.$$

(x, y) 平面上の C^1 級曲線 $y = f(x)$ $(0 \leq a \leq x \leq b)$ を y 軸の周りに一回転してできる回転面 S_1 の曲面積及び (x, y) 平面上の C^1 級曲線 $y = g(x)$ $(a \leq x \leq b)$ を x 軸の周りに一回転してできる回転面 S_2 の曲面積はそれぞれ次で与えられます.

$$|S_1| = 2\pi \int_a^b x\sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx, \quad |S_2| = 2\pi \int_a^b |y|\sqrt{1 + g'(x)^2}\,dx.$$

(III) 慣性モーメント.

空間内の物体 V の点 (x, y, z) での密度が $\rho(x, y, z)$ で与えられるとします．このような ρ を**密度関数**といいます．また，空間内の直線を ℓ とします．V の点 (x, y, z) と ℓ との距離を $r(x, y, z)$ とします．このとき３重積分

$$I_\ell = \iiint_V r^2 \rho\,dV = \iiint_V r(x, y, z)^2 \rho(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$$

を V の ℓ に関する**慣性モーメント**といいます.

慣性モーメントの他にも，剛体の「曲げモーメント」や「ねじりモーメント」という「モーメント」と呼ばれる量があります.