微分積分学演習第二 (2024 4Q N)

[命題論理]

A, B を命題とします．したがって，A と B は真であるか偽であるかが決まっています．そこで命題から集合 $\{T, F\}$ への関数を

$$A \text{ が真のとき T(rue)},\ A \text{ が偽のとき F(alse)}$$

と定めます．この関数を**真理関数**といい，この関数値を A の**真理値**と呼びます．

命題 A, B から

(1) **否定**「A ではない」: A が偽のとき「真」
(2) **論理積**「A かつ B」: A, B が共に真のとき「真」
(3) **論理和**「A または B」: A, B の一方が真のとき「真」
(4) **含意**「A ならば B」: A が真であり B が偽のとき「偽」

という命題が構成できます．これらの命題の真理値は A, B の真理値に応じて次のようになります．

A	B	not A	A and B	A or B	$A \Rightarrow B$
F	F	T	F	F	T
F	T	T	F	T	T
T	F	F	F	T	F
T	T	F	T	T	T

さらに変数を含む命題 (数学Aでは条件と呼んでいたもの) を考えます．つまり x を変数として含む命題「$x > 0$ である」といったものを考えます．このような命題を $F(x)$ と表すことにします．また，このような x を**自由変数**といいます．これに対して「任意の x に対して $x > 0$ である」や「ある x に対して $x > 0$ である」という命題の x を**束縛変数**といいます．このような命題を，それぞれ $\forall x F(x)$, $\exists x F(x)$ と表します．

このような束縛変数を含む命題の否定は

任意の x に対して $F(x)$ である $(\forall x F(x))$

$\overset{\text{否定}}{\to}$ ある x に対して $F(x)$ ではない $\Longleftrightarrow$ $F(x)$ ではないような x が存在する $(\exists x(\text{not}\, F(x)))$,

ある x に対して $F(x)$ である $\Longleftrightarrow$ $F(x)$ であるような x が存在する $(\exists x F(x))$

$\overset{\text{否定}}{\to}$ 任意の x に対して $F(x)$ ではない $(\forall x(\text{not } F(x)))$

となります．

束縛変数を複数個含むような命題は，束縛変数が出現した順に決まっていきます．例えば

$$\forall x \exists y F(x, y) \iff \text{任意の } x \text{ に対してある } y \text{ が存在して } F(x, y) \text{ である}$$

では，最初に任意に x を一つ決めたときに $F(x, y)$ であるような y が (各 x ごとに) 存在すれば「真」となります．一方

$$\exists y \forall x F(x, y) \iff \text{ある } y \text{ が存在して，任意の } x \text{ に対して } F(x, y) \text{ である}$$

では,「任意の x に対して $F(x, y)$ である」ような y が (少なくとも 1 つ) 存在するときに「真」となります．

[命題論理]

A, B を命題とします．この A, B から作られる命題「A ではない」,「A かつ B」,「A または B」,「A ならば B」をそれぞれ $\neg A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \to B$ と表します．

$\neg A$	: A ではない．
$A \wedge B$	: A かつ B．
$A \vee B$	: A または B．
$A \to B$	: A ならば B．$A \Rightarrow B$ と表すこともある．
$A \leftrightarrow B$	: A と B は同値．$(A \to B) \wedge (B \to A)$ を意味する．$A \Leftrightarrow B$ と表すこともある．

ここでの $\wedge$, $\vee$ は２つの命題から１つの命題を与えるものであり，集合の $\cap$, $\cup$ とは異なります．

E を集合とします．束縛変数を含む命題 $F(x)$ の変数 x を E 内に限ることもあります．「任意の E の要素 x に対して」,「ある E の要素 x で」はそれぞれ $\forall x \in E$, $\exists x \in E$ と表します．

$(\forall x \in E)F(x)$	: 任意の $x \in E$ に対して $F(x)$ である．
$(\exists x \in E)F(x)$	: $F(x)$ であるような $x \in E$ が存在する．

これらをいくつか組み合わせて命題ができますが，上で挙げた命題の否定は次のようになります．

もとの命題	その否定命題	同値な言い換え
$\neg A$	: $\neg(\neg A)$	: A
$A \wedge B$	: $\neg(A \wedge B)$	: $(\neg A) \vee (\neg B)$
$A \vee B$	: $\neg(A \vee B)$	: $(\neg A) \wedge (\neg B)$
$A \to B$	: $\neg(A \to B)$	: $A \wedge (\neg B)$
$(\forall x \in E)F(x)$	: $\neg((\forall x \in E)F(x))$	: $(\exists x \in E)(\neg F(x))$
$(\exists x \in E)F(x)$	: $\neg((\exists x \in E)F(x))$	: $(\forall x \in E)(\neg F(x))$

１つの命題に対して真が偽かが定まります．

(P1) $$\text{任意の } x \in \mathbb{R} \text{ に対して } x \geq 0$$

という命題を考えます．どんな実数 x でも $x \geq 0$ をみたすときこの命題は真となりますが，いま $x = -1$ という実数に対して $x \geq 0$ をみたさないので命題 (P1) は偽です．また

(P2) $$\text{ある } x \in \mathbb{R} \text{ に対して } x \geq 0$$

という命題を考えます．$x \geq 0$ をみたす実数が何か１つでもあればこの命題は真となります．いま $x = 1$ という実数は $x \geq 0$ をみたすので命題 (P2) は真です．

x, y を変数として

(P3) $$\text{任意の } x \in \mathbb{R} \text{ に対して，ある } y \in \mathbb{N} \text{ が存在して } x \leq y$$

という命題を考えます．どんな実数 x を選んでも $x \leq y$ をみたす自然数 y が１つでもあるときこの命題は真です．いま自然数 y を $y = [|x|] + 1$ ととることができるのでこの命題 (P3) は真です．

次に

(P4) $$\text{ある } y \in \mathbb{N} \text{ が存在して，全ての } x \in \mathbb{R} \text{ に対して } x \leq y$$

という命題を考えます．「どんな実数 x でも $x \leq y$」となるような自然数 y が１つでもあれば命題は真となります．もしこのような自然数 $y = y_0$ が存在したと仮定するとどんな実数 x も $x \leq y_0$ をみたします．ところが $x = y_0 + 1$ は $x \leq y_0$ をみたさないので矛盾します．したがってこのような y は存在しないので命題 (P4) は偽です．

[実数の連続性]

E を実数を要素とする集合で E は空集合ではないとします．実数 a が任意の $x \in E$ に対して $x \leq a$ をみたすとき，この a を E の**1つの上界**といいます．また E に上界が存在するとき E は**上に有界**であるといいます．

いま集合 $E \neq \emptyset$ が上に有界であるとしましょう．このとき E の上界を要素とする集合 F が定義できます．

$$F = \{a \in \mathbb{R} \mid a \text{ は } E \text{ の1つの上界 }\}.$$

「この F には必ず最小値が存在する」ということが実数を特徴付ける最も大切な「実数の連続性」という性質です．この最小値を E の**上限**と呼び $\sup E$ で表します．

公理． (実数の連続性)

> 実数を要素とする，空でない，上に有界な集合は (実数に) 上限を持つ．

E は上に有界とし，$\alpha = \sup E$ を E の上限とします．α は F の要素ですので E の1つの上界です．よって

(1) 任意の $x \in E$ に対して $x \leq \alpha$

をみたします．さらに α は F の最小値ですので α より小さい E の上界は存在しません．したがって任意の $\gamma < \alpha$ に対しては γ は E の上界ではありませんから，γ より大きな E の要素があります．これより

(2) 任意の $\gamma < \alpha$ に対して $\gamma < x$ をみたす $x \in E$ が存在する

もみたします．逆にこの (1), (2) の性質を持つ実数 α は E の上限になります．

定理． (上限)

> 実数の集合 E は上に有界とする．このとき，次をみたす実数 α は E の上限である．
>
> (1) 任意の $x \in E$ に対して $x \leq \alpha$,
>
> (2) 任意の $\gamma < \alpha$ に対して $\gamma < x$ をみたす$\underline{x \in E}$ が存在する．

E を上に有界な集合とします．$M \in E$ が，任意の $x \in E$ に対して $x \leq M$ をみたすとき M を E の**最大値**といいます．

定義． (最大値)

> 実数の集合 E は上に有界とする．このとき，次をみたす実数 M は E の最大値である．
>
> (1) 任意の $x \in E$ に対して $x \leq M$,
>
> (2) $M \in E$.

実数の集合 $E \neq \emptyset$ が上に有界ならば，実数の連続性によって必ず上限が存在します．しかし，E が上に有界としても最大値は存在するとは限りません．

実数の連続性から次が成り立ちます．

定理． (アルキメデスの原理)

> 自然数全体のなす集合 $\mathbb{N}$ は上に有界ではない．

このことから任意の $\varepsilon > 0$ に対して $1/n < \varepsilon$ となるような自然数 n が存在することがわかります．

定理． (有理数の稠密性)

> 2つの異なる実数 a, b の間に有理数が存在する．

このことから任意の実数 a に対して a に収束するような有理数列が存在することが示せます．

[上限・下限]
$E \neq \emptyset$ を実数の部分集合 $(E \subset \mathbb{R})$ とします.
命題

(P) 「ある K が存在して，任意の $x \in E$ に対して $x \leq K$」

を考えます．この命題は,「任意の $x \in E$ に対して $x \leq K$」が真となるような定数 K が存在するとき「真」です．例えば E が区間 $[0,1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$ のとき $K = 2$ は「任意の $x \in E$ に対して $x \leq K$」をみたすので命題 (P) は真となります.

命題 (P) の否定は

「任意の K に対して，ある $x \in E$ が存在して $x > K$」

です．例えば E が実数全体のなす集合 $\mathbb{R}$ のとき，どんな K に対しても $x = K + 1$ ととると $x \in E$ で $x > K$ をみたすので命題「P でない」が真となります．したがって $E = \mathbb{R}$ については命題 (P) は偽です.

集合 $E \neq \emptyset$ が命題 (P) をみたす (真となる) とき，E は**上に有界**であり，このときの数 K が E の**1つの上界**です．これより

$$E \text{ は上に有界} \iff E \text{ は上界を持つ}$$

がわかります.

命題 (Q) を

a と b は限りなく近い

とします．このとき a と b の距離 $|a - b|$ がある正の数 ε より大きいと $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) = \{x \mid a - \varepsilon < x < a + \varepsilon\}$ の範囲に b はいませんから a と b の近さに限界があります．したがって命題 (Q) は

どんな $\varepsilon > 0$ に対しても $|a - b| < \varepsilon$

となります.

$E \neq \emptyset$ は上に有界であるとします．このとき**実数の連続性**より E は上限 $\alpha = \sup E$ を持ちます．α は次の条件で特徴づけられました.

(1) 全ての $x \in E$ に対して $x \leq \alpha$.
(2) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\alpha - \varepsilon < x$ をみたす $x \in E$ が存在する.

(1) により α は E の1つの上界です．また (2) により，任意の $\varepsilon > 0$ に対して $0 \leq \alpha - x < \varepsilon$ をみたしますから「α に限りなく近い $x \in E$ が存在する」ことを表しています．これより E の上限とは

E の上界 α で，α に限りなく近い E の元が存在するもの

となります.

こうして上に有界な集合 E に対して，E の上限が**予想**できます．その予想が正しいことを，上の (1), (2) の条件を確かめることによって**証明**します.

[極限]

実数の数列 $\{a_n\}$ の極限値が α であることを，自然数 n が大きくなるとき a_n が「限りなく α に近づく」と学習してきたと思いますが，この「限りなく近づく」を厳密に定義します．

まず，2 つの実数 a, b が「限りなく近い」ことは前回のプリントにあるように

$$a, b \in \mathbb{R} \text{ が限りなく近い} \iff \text{任意の } \varepsilon > 0 \text{ に対して } |a-b| < \varepsilon$$

と言い換えることができます．

次に，実数列 $\{a_n\}$ が α に「限りなく近づく」ことを考えてみましょう．まず,「限りなく近く」なることから

$$\text{任意の } \varepsilon > 0 \text{ に対して } |\text{ 何かの条件 }| < \varepsilon$$

のような形になることが予想されます．いま $\{a_n\}$ が α に限りなく「近づいて」行きますから最初のいくつかは α に近くなくても構いません．十分先の $\{a_n\}$ たちについて成り立てばよいわけですから，ある (十分大きな) 自然数 N があって $n \geq N$ であるような全ての自然数 n について「限りなく近く」なっていればよいです．そこで

$$\begin{aligned}&\text{任意の } \varepsilon > 0 \text{ に対してある自然数 } N \text{ が存在して,}\\&\text{任意の } n \in \mathbb{N} \text{ に対して } n \geq N \text{ ならば } |\text{ 何かの条件 }| < \varepsilon\end{aligned}$$

のようになります．いま十分大きな n に対して a_n たちが α に近くなっているはずですので結局

$$\begin{aligned}&\text{任意の } \varepsilon > 0 \text{ に対してある自然数 } N \text{ が存在して,}\\&\text{任意の } n \in \mathbb{N} \text{ に対して } n \geq N \text{ ならば } |a_n - \alpha| < \varepsilon\end{aligned}$$

となることがわかります．そこでこれを「数列 $\{a_n\}$ が α に収束する」ことの定義とします．

定義. (収束)

実数の数列 $\{a_n\}$ が **α に収束する**
$\iff$ 任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある自然数 N が存在して，全ての自然数 n に対して，$n \geq N$ ならば $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ である．

大事なことは，まず任意に $\varepsilon > 0$ を取ってきたときにその ε に対して条件をみたすようなある自然数 N が必ず決まるということです．最初に選んだ $\varepsilon > 0$ が小さくなると収束の条件をみたすような N は一般に大きくなっていきます．

数列 $\{a_n\}$ が α に収束するとき $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ とか，$a_n \to \alpha$ $(n \to \infty)$ と表します．数列 $\{a_n\}$ が収束しないとき**発散する**といいます．特に,「任意の K に対してある自然数 N が存在して，全ての自然数 n に対して，$n \geq N$ ならば $a_n > K$」が成り立つとき，数列 $\{a_n\}$ は **∞ に発散する**といいます．

定義. (発散)

数列 $\{a_n\}$ が**発散**する
$\iff$ どんな実数 α に対しても $\{a_n\}$ は α に収束しない．

数列 $\{a_n\}$ が **∞ に発散**する
$\iff$ 任意の K に対してある自然数 N が存在して，全ての自然数 n に対して，$n \geq N$ ならば $a_n > K$ である．

数列 $\{a_n\}$ が **$-\infty$ に発散**する
$\iff$ 任意の K に対してある自然数 N が存在して，全ての自然数 n に対して，$n \geq N$ ならば $a_n < K$ である．

[極限の公式]

極限値を $\varepsilon - N$ 論法を用いて求めるのは難しいです．一般の数列に関しては分かっている ($\varepsilon - N$ 論法を用いて求まっている) 極限値を元に，次の公式を用いて求めます．

定理. (極限値の公式)

$\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n$, $\beta = \lim_{n\to\infty} b_n$ とする．このとき次が成り立つ．

(1) $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \alpha \pm \beta$.

(2) $\lim_{n\to\infty} ca_n = c\alpha$ (c は定数).

(3) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha\beta$.

(4) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{b_n}{a_n} = \dfrac{\beta}{\alpha}$ (ただし任意の $a_n \neq 0$, $\alpha \neq 0$).

この公式は数列 $\{a_n\}$ や $\{b_n\}$ が $\pm\infty$ に発散する場合でも c を実数として

$$\pm\infty + c = \pm\infty,\ \pm\infty \pm \infty = \pm\infty,\ (\pm\infty)\cdot(\pm\infty) = \infty,$$
$$(\pm\infty)\cdot(\mp\infty) = -\infty,\ \frac{c}{\pm\infty} = 0,\ c\cdot\infty = \begin{cases} \infty, & c > 0 \\ -\infty, & c < 0 \end{cases}$$

のように定義して，数列 $\{a_n\}$ や $\{b_n\}$ が $\pm\infty$ に発散する場合にも用いることができます．ただし，

$$\infty - \infty,\ 0\cdot(\pm\infty),\ \infty/\infty,\ 0/0$$

の場合は**不定形**といい，このままでは極限値を求めることはできません．

数列 $\{1/n\}$ の極限は $\varepsilon - N$ 論法を用いて求めることができます．また $a > -1$ のとき $\{a^n\}$ の極限も $\varepsilon - N$ 論法で求めることができます．したがってこれらの数列の部分列の極限もわかります．さらに $P(x, y)$, $Q(x, y)$ を x, y の多項式 (整式) として $\{P(1/n, a^n)/Q(1/n, a^n)\}$ のような数列の極限も，上の公式から求めることができます．

この他にも次が成り立ちます．

定理. (はさみうちの原理)

任意の n に対して $a_n \leq b_n \leq c_n$ で，$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ かつ $\lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$ とする．このとき数列 $\{b_n\}$ も収束して $\lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$ となる．

定理. (追い出しの原理)

任意の n に対して $a_n \leq b_n$ とする．

(1) $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ ならば数列 $\{b_n\}$ も ∞ に発散する．

(2) $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$ ならば数列 $\{a_n\}$ も $-\infty$ に発散する．

定理. (逐次平均)

$n \to \infty$ のとき $a_n \to \alpha$ ならば $\dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \to \alpha$ である．

[極限の性質]
数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束しているとします．このときある α が存在して，

任意の $\varepsilon > 0$ に対してある自然数 N が存在して，
全ての $n \in \mathbb{N}$ に対して $n \geq N$ のとき $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ である

となりました．この α を数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の極限値と呼びましたが，このような α はただ1つしかありません．つまり次が成り立ちます．

定理. (極限値の一意性)

$n \to \infty$ のとき $a_n \to \alpha$ かつ $a_n \to \beta$ ならば $\alpha = \beta$.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を数列とします．自然数の無限増加列 $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < n_{k+1} < \ldots$ に対して $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ から $n_1, n_2, \ldots, n_k, n_{k+1}, \ldots$ 番目だけを取り出して，数列

$$\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} = \{a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_k}, a_{n_{k+1}}, \ldots\}$$

ができます．このような数列を数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の**部分列**といいます．数列の部分列に対して次が成り立ちます．

定理. (部分列の極限)

$a_n \to \alpha$ $(n \to \infty)$ のとき数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の任意の部分列 $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ に対して $a_{n_k} \to \alpha$ $(k \to \infty)$ である．

これは $\alpha = \pm\infty$ でも成り立ちます．

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ において増加する添字が明らかなときは単に数列 $\{a_n\}$ で表します．数列 $\{a_n\}$ が収束するとき，集合 $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ は有界です．ところが集合 $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ が有界としても，数列 $\{a_n\}$ が収束するとは限りません．$a_n = (-1)^n$ とすると集合として $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{\pm 1\}$ ですが，数列 $\{a_n\}$ は収束しません．しかし，数列 $\{a_n\}$ の部分列で収束するものが存在します．

定理. (ボルツァノ・ワイエルストラスの定理)

有界な数列は，収束するような部分列をもつ．

数列の各項に大小関係があるとき，極限を取っても数列の大小関係は保存されます．

定理. (極限値の大小関係)

任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n \leq b_n$ が成り立っていて (ある自然数 N が存在して $n \geq N$ なるすべての自然数 n に対して $a_n \leq b_n$ が成り立っているとしてもよい)，$n \to \infty$ のとき $a_n \to \alpha$, $b_n \to \beta$ とする．このとき $\alpha \leq \beta$ である．

ただし，任意の n に対して $a_n < b_n$ であったとしても $\alpha = \beta$ となることもあります．例えば $a_n = \dfrac{1}{n}, b_n = \dfrac{2}{n}$ とすると，任意の n に対して $a_n < b_n$ ですが $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ です．

ちなみに「$\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ とする」と書いた場合は「数列 $\{a_n\}$ が<u>収束して</u>，その極限値を α とする」の意味です．$\alpha = \infty$ の場合も同様に「数列 $\{a_n\}$ が ∞ に発散する」の意味です．このように lim には「収束する」や「$\pm\infty$ に発散する」という条件も含まれています．基本的には<u>極限の存在を示してから</u> lim という記号を使いましょう．

[収束判定法]

収束の定義は

任意の $\varepsilon > 0$ に対してある自然数 N が存在して，

全ての $n \in \mathbb{N}$ に対して，$n \geq N$ のとき $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ である

となっているように，あらかじめ極限値 α がわかっていないと収束することを示すことができません．しかし，極限値がわからなくてもどこかに収束するかどうかを判定する方法があります．

第一に実数の連続性「上に有界な空でない集合は上限を持つ」と同値な命題で収束の判定ができます．

定理．(実数の連続性)

上に有界な単調増加数列は収束する．

同様に「下に有界な単調減少数列も収束」します．この 2 つを合わせて「有界な単調数列は収束する」といいます．

ここで，数列 $\{a_n\}$ が「任意の n に対して $a_n \leq a_{n+1}$」のとき単調増加数列であるといいます．また「ある実数 K が存在して任意の n に対して $a_n \leq K$」のとき上に有界であるといいます．これは数列の各値のなす集合 $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ が上に有界であることです．

その他に基本列 (コーシー列) という条件があります．

定義．(基本列)

数列 $\{a_n\}$ が<u>**基本列**</u>である

$\iff$ 任意の $\varepsilon > 0$ に対してある自然数 N が存在して，任意の $m, n \in \mathbb{N}$ に対して，$m, n \geq N$ ならば $|a_n - a_m| < \varepsilon$ が成り立つ．

収束の定義では

$$\text{ある実数 } \alpha \text{ が存在して，} n \geq N \text{ ならば } |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

ですが，基本列では

$$m, n \geq N \text{ ならば } |a_n - a_m| < \varepsilon$$

と変わっていて，極限値の候補については何も主張していません．

基本列に関しては次が成り立ちます．

命題．(基本列と収束)

数列 $\{a_n\}$ は基本列である $\iff$ 数列 $\{a_n\}$ は収束する．

このようなとき数列 $\{a_n\}$ は極限値が何であるかはわかりませんが，収束することはわかります．したがって極限値が存在するのでその値を α などと置くことができます．すると漸化式 $a_{n+1} = f(a_n)$ などで両辺の極限を考えることができます．関数 $f(x)$ が<u>**連続**</u>のとき，この漸化式の極限をとって極限値の候補がわかります．

また数列 $\{a_n\}$ が基本列ではないとき $\{a_n\}$ は発散します．$\{a_n\}$ が基本列ではないことは

$$\text{ある } \varepsilon > 0 \text{ が存在して，任意の } N \in \mathbb{N} \text{ に対してある } m, n \geq N \text{ が存在して } |a_n - a_m| \geq \varepsilon$$

となります．

これらの他に，収束することだけでなく極限までも求めることができる判定法もあります．

定理．(収束判定)

数列 $\{a_n\}$ に対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = c$ または $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = c$ となるとき

(1) $0 \leq c < 1$ ならば $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$,

(2) $1 < c \leq \infty$ ならば $|a_n| \to \infty$ $(n \to \infty)$ である．

[関数の極限]

これまでは数列の極限でしたが，次に関数の極限を考えます．

高校では「x が a と異なる値をとりながら限りなく a に近づくとき $f(x)$ が限りなく一定の値 A に近づく」とき，A を x が a に近づくときの $f(x)$ の極限値と呼びました．これを数列の極限のように定式化します．

数列と同様に $f(x)$ が A に限りなく近づくので

$$\text{任意の } \varepsilon > 0 \text{ に対して (何かの条件) ならば } |f(x) - A| < \varepsilon$$

という形になることが予想されます．ただし $|f(x) - A| < \varepsilon$ となるのは「x が a と異なる値をとりながら限りなく a に近いとき」でしたから，

$$\delta > 0 \text{ が存在して } 0 < |x - a| < \delta$$

のときに $|f(x) - A| < \varepsilon$ となればよいことがわかります．そこで次のように定義します．

定義. (関数の極限)

関数 $f(x)$ が $x \to a$ のとき**収束**して極限値 A をもつ．
$\iff$ 任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在して，任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して，
$0 < |x - a| < \delta$ ならば $|f(x) - A| < \varepsilon$ が成り立つ．

関数の極限についても数列のときと同様に大事なことは，まず任意に $\varepsilon > 0$ を取ってきたときにその ε に対して条件をみたすような $\delta > 0$ が必ず決まるということです．最初に選んだ $\varepsilon > 0$ が小さくなると収束の条件をみたすような $\delta > 0$ は一般に小さく取る必要があります．

また $x \to a$ のとき $f(x)$ が **∞ に発散する**ことも同様にして

任意の K に対してある $\delta > 0$ が存在して，
任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して，$0 < |x - a| < \delta$ ならば $f(x) > K$ が成り立つ

と表されます．

数列の時と同様に，関数 $f(x)$ が $x \to a$ のとき収束して極限値が A であることを $\lim_{x \to a} f(x) = A$ で表します．また $f(x)$ が $x \to a$ のとき ∞ に発散することを $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ で表します．

また関数の極限は「x が a に近づくときに $f(x)$ が A に近づく」ことですから，その関数の定義域内の数列を用いても表すことができます．

定理. (関数の点列における収束)

関数 $f(x)$ が $x \to a$ のとき A に収束する．
$\iff$ a に収束するどんな数列 $\{x_n\}$ (ただし $x_n \neq a$) に対しても数列 $\{f(x_n)\}$ が A に収束する．

この定理の $\Leftarrow$ を用いるためには a に収束する「どんな」数列に対しても成り立つことを言う必要があります．$x \to a$ のとき $f(x) \to A$ が成り立つならば $x_n \to a$ なる数列 $\{x_n\}$ に対して $f(x_n) \to A$ となりますが,「ある」数列 $x_n \to a$ に対して $f(x_n) \to A$ となっていたからと言って $f(x) \to A$ とは限りません．

関数の和・差・積・商に関してそれらの極限は数列のときと同様に次が成り立ちます.

定理. (関数の極限と四則)

$\lim_{x\to a} f(x) = A,\ \lim_{x\to a} g(x) = B$ のとき

$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = A+B,\ \lim_{x\to a} cf(x) = cA\ (c\ \text{は定数}),$$

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = AB,\ \lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{B}{A}\ (\text{ただし}\ A\neq 0).$$

x が a に近づけるとき x を $a<x$ として a に近づける方向と $x<a$ として a に近づける方向があります. このような極限を<u>**片側極限**</u>といいます. 片側極限のうち $a<x$ として x を a に近づけた極限を<u>**右極限**</u>といい $\lim_{x\to a+0} f(x)$ で表します. また $x<a$ として x を a に近づけた極限を<u>**左極限**</u>といい $\lim_{x\to a-0} f(x)$ で表します. 特に $f(x)$ が a において右極限と左極限が存在して一致しているとき $f(x)$ は a で収束してその極限値はそれら共通の値になります.

いま a は実数でしたが $a=\infty$ のとき, つまり x が限りなく大きくなっていくときの $f(x)$ の極限を考えることもできます. このときは数列のときと同様に次のようになります.

定義. (関数の極限)

関数 $f(x)$ が $x\to\infty$ のとき収束して極限値 A をもつ
$\iff$ 任意の $\varepsilon>0$ に対してある L が存在して, 任意の $x\in\mathbb{R}$ に対して, $x>L$ ならば $|f(x)-A|<\varepsilon$ が成り立つ.

関数の極限の定義をまとめると次のような組み合わせになります.

	任意の (1) に対して,	ある (2) が存在して	(3) ならば	(4) である.
$x\to a$		$\delta>0$	$0<\lvert x-a\rvert<\delta$	
$x\to\infty$		$L>0$	$x>L$	
$x\to-\infty$		$L>0$	$x<-L$	
$f(x)\to A$	$\varepsilon>0$			$\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$
$f(x)\to\infty$	$K>0$			$f(x)>K$
$f(x)\to-\infty$	$K>0$			$f(x)<-K$

関数についてもコーシーの判定条件があります.

定理. (コーシーの判定条件)

$x\to a$ のとき $f(x)$ が収束する.
$\iff$ 任意の $\varepsilon>0$ に対してある $\delta>0$ が存在して, 任意の $x,x'\in\mathbb{R}$ に対して, $0<|x-a|<\delta, 0<|x'-a|<\delta$ ならば $|f(x)-f(x')|<\varepsilon$ が成り立つ.

$x\to\infty$ のときのコーシーの判定条件は次のようになります.

定理. (コーシーの判定条件)

$x\to\infty$ のとき $f(x)$ が収束する.
$\iff$ 任意の $\varepsilon>0$ に対してある L が存在して, 任意の $x,x'\in\mathbb{R}$ に対して, $x,x'>L$ ならば $|f(x)-f(x')|<\varepsilon$ が成り立つ.

[連続関数]

関数の大事な性質の１つとして「連続」と呼ばれるものがあります．これは大雑把に言って「十分近くで繋がって見える」ことを表しています．この連続という性質は $\varepsilon-\delta$ を用いて関数の極限と似たような式で定義されます.

定義. (連続関数)

関数 $f(x)$ が $x=x_0$ で**連続**である.
$\iff$ 任意の $\varepsilon>0$ に対してある $\delta>0$ が存在して，任意の $x\in\mathbb{R}$ に対して，$|x-x_0|<\delta$ ならば $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ となる.

これは言い換えると $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ と同値です．また $x\to x_0+0$ のとき $f(x)\to f(x_0)$ であるなら $f(x)$ は $x=x_0$ で**右連続**であるといいます．同様に $x\to x_0-0$ のとき $f(x)\to f(x_0)$ であるなら $f(x)$ は $x=x_0$ で**左連続**であるといいます．右連続または左連続であるとき**片側連続**といいます.

関数 $f(x)$ が区間 I で定義されていて，任意の $x_0\in I$ に対して $f(x)$ が x_0 で連続 (x_0 が I の端点のときは片側連続) であるとき $f(x)$ は I 上で連続であるといいます.

いくつかの連続関数があるとき，それらから連続関数を作ることができます.

定理. (連続関数の和・差・積・商及び合成)

(1) $f(x),g(x)$ は $x=x_0$ で連続，k は定数とする．このとき $f(x)+g(x)$, $kf(x)$, $f(x)g(x)$ は $x=x_0$ で連続，$f(x_0)\neq 0$ ならば $\dfrac{g(x)}{f(x)}$ は $x=x_0$ で連続.

(2) $y=f(x)$ の値域が $g(y)$ の定義域に含まれているとする．$y=f(x)$ は $x=x_0$ で連続，$g(y)$ は $y=y_0=f(x_0)$ で連続とすると合成関数 $(g\circ f)(x)=g(f(x))$ は $x=x_0$ で連続である.

この定理から，多項式で表される関数 $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$ や連続関数の合成関数なども連続となります．特に連続関数の商をとるとき，分母が 0 となる $x=x_0$ 上では x_0 での値をうまく定めることによって連続となることがあります．例えば $\mathbb{R}$ 上の関数 $f(x)$ を $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$ と定義すると $f(x)$ は $\mathbb{R}$ 上で連続です.

上の定理などによって関数 $f(x)$ が連続であることがわかると次が成り立ちます.

定理. (極限と連続関数の交換)

関数 $f(x)$ は区間 I で連続とする．数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subset I$ が収束して極限値が I に含まれれば $\lim_{n\to\infty} f(a_n)=f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)$ が成り立つ.

関数の極限と同様に，一般に次が成り立ちます.

定理. (連続関数の点列における収束)

関数 $f(x)$ は $x=a$ で連続である.
$\iff$ $\lim_{n\to\infty} a_n=a$ をみたす任意の数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して $\lim_{n\to\infty} f(a_n)=f(a)$ が成り立つ.

[連続関数の性質]
閉区間上で定義された連続関数について次が成り立ちます.

定理. (中間値の定理)

$f(x)$ は区間 $I=[a,b]$ で連続とする．$f(a)\neq f(b)$ ならば $f(a)$ と $f(b)$ の間にある任意の γ に対して $\gamma=f(c)$ となる $c\in I$ がある.

定理. (最大値・最小値定理)

$f(x)$ は閉区間 I 上で連続とする．このとき集合 $\{f(x)\mid x\in I\}$ は最大値と最小値を持つ.

関数 $f(x)$ は区間 I 上定義されているとします．このとき集合 $f(I)=\{f(x)\mid x\in I\}$ を関数 $f(x)$ の**像**といいます．I 上定義された関数 $f(x)$ の像が有界のとき関数 $f(x)$ は I 上**有界**であるといいます．したがって最大値・最小値定理より $f(x)$ が閉区間 I 上で連続のとき $f(x)$ は I 上有界で，$f(I)$ も閉区間になります.

区間 I で定義された関数 $f(x)$ が任意の $x,x'\in I$ に対して

$$x\leq x'\Longrightarrow f(x)\leq f(x')$$

となるとき f は**単調増加関数**であるといいます．特に $x,x'\in I$ に対して

$$x< x'\Longrightarrow f(x)< f(x')$$

であるとき**狭義単調増加関数**であるといいます．単調減少関数，狭義単調減少関数についても同様です．単調増加関数，単調減少関数を合わせて**単調関数**といいます.

単調関数について次が成り立ちます.

定理. (閉区間上の単調関数)

閉区間 $I=[a,b]$ における単調関数 $f(x)$ が $f(a)$ と $f(b)$ の間にある値を全て取れば $f(x)$ は I で連続.

I 上定義された関数 $f\colon I\to J$ が全単射であるとき任意の $y\in J$ に対して $f(x)=y$ をみたす x がただ１つ存在します．そこで写像 $J\to I$ が

$$y\in J \text{ に対して } f(x)=y \text{ となる } x$$

と定義できます．これを f の逆関数といい f^{-1} で表します.

定理. (狭義単調関数の逆関数)

区間 I で定義された狭義単調関数 $f(x)$ が連続ならば，逆関数 $f^{-1}\colon f(I)\to I$ が存在して $f^{-1}(x)$ も狭義単調な連続関数である.

n を自然数とします．関数 $f(x)=x^{2n}$ は $x\geq 0$ で狭義単調増加な連続関数であり，値域は $y\geq 0$ ですから逆関数 $f^{-1}(x)=\sqrt[2n]{x}$ は $x\geq 0$ で定義された狭義単調増加な連続関数です．また $g(x)=x^{2n+1}$ は $x\in\mathbb{R}$ で狭義単調増加な連続関数で，値域も $\mathbb{R}$ 全体ですから逆関数 $g^{-1}(x)=\sqrt[2n+1]{x}$ は $\mathbb{R}$ 上で狭義単調増加な連続関数です.

[一様連続]

関数 $f(x)$ が区間 I で連続とします．したがって定義から

$$\text{任意の } a \in I \text{ と任意の } \varepsilon > 0 \text{ に対してある } \delta > 0 \text{ が存在して，}$$
$$\text{任意の } x \in I \text{ に対して，} |x-a| < \delta \text{ ならば } |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

が成り立ちます．このときの δ は

(1) 連続かどうかを調べる点 $x = a$ と

(2) 限りなく近くするような ε

に応じて決めることができます．つまり δ は $a \in I$ と $\varepsilon > 0$ で決まる数です．

この δ が $a \in I$ に<u>無関係に</u>定めることができるとき $f(x)$ は I 上**<u>一様連続</u>**であるといいます．

定義. (一様連続)

区間 I 上定義された関数 $f(x)$ が次をみたすとき $f(x)$ は I 上**<u>一様連続</u>**であるという．

$$\text{任意の } \varepsilon > 0 \text{ に対してある } \delta > 0 \text{ が存在して，}$$
$$\text{任意の } a \in I \text{ と } x \in I \text{ に対して，} |x-a| < \delta \text{ ならば } |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

このように一様連続では

$$\text{どんな } a \in I \text{ でも共通の } \delta \text{ で } |x-a| < \delta \text{ ならば } |f(x) - f(a)| < \varepsilon \text{ が成り立つ}$$

ようにすることができます．

$f_2(x) = x^2$ とします．どんな $\delta > 0$ を取っても $a > \varepsilon/\delta$ のとき $x = a + \delta/2$ に対して

$$f_2(x) - f_2(a) = \left(a + \frac{\delta}{2}\right)^2 - a^2 = a\delta + \frac{\delta^2}{4} > a\delta > \varepsilon$$

となるので $f_2(x) = x^2$ は $\mathbb{R}$ 上連続ですが一様連続ではありません．

$f_1(x) = x$ とします．このとき任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta = \varepsilon$ と取ると，どんな $a \in \mathbb{R}$ に対しても $|x-a| < \delta$ のとき

$$|f_1(x) - f_1(a)| = |x - a| < \delta = \varepsilon$$

となります．したがって $f(x) = x$ は $\mathbb{R}$ 上一様連続です．

一般に連続関数は一様連続とは限りません．しかし閉区間上では次が成立します．

定理. (一様連続性)

閉区間上の連続関数は一様連続である．

$f_2(x) = x^2$ は $\mathbb{R}$ 上一様連続ではありませんが任意の閉区間 $I = [c, d] \subset \mathbb{R}$ 上では一様連続です．

$M > \max\{|c|, |d|\}$ とします．任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2M}$ と取ります．任意の $a, x \in I$ に対して $|x-a| < \delta$ のとき

$$|f_2(x) - f_2(a)| = |x^2 - a^2| = |(x+a)(x-a)| < (|x| + |a|)\delta < 2M\frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon$$

となるので一様連続であることがわかります．

[平均値の定理とロピタルの定理]
導関数に関して次の定理が成り立ちます.

定理. (ロルの定理)

関数 $f(x)$ は閉区間 $[a,b]$ 上で連続，開区間 (a,b) 上で微分可能とする．このとき $f(a)=f(b)$ ならば $f'(c)=0$ となる c が区間 (a,b) に存在する.

このロルの定理を用いて，平均値の定理が証明できます.

定理. (平均値の定理)

関数 $f(x)$ は閉区間 $[a,b]$ 上で連続，開区間 (a,b) 上で微分可能とする．このとき

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

をみたす c が区間 (a,b) に存在する.

定理. (コーシーの平均値定理)

関数 $f(x),g(x)$ は閉区間 $[a,b]$ 上で連続，開区間 (a,b) 上で微分可能とし，開区間 (a,b) 上で $g'(x)\neq 0$ とする．このとき

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

をみたす c が区間 (a,b) に存在する.

平均値の定理を用いて次のことが分かります.

系. (単調関数)

関数 $f(x)$ が区間 I 上で微分可能とする．このとき

(1) $f(x)$ は I 上単調増加 $\iff$ I 上 $f'(x)\geq 0$.
(2) $f(x)$ が I 上常に $f'(x)=0$ ならば $f(x)$ は I 上で定数.

微分の応用として，関数の極限が不定形 ($\infty-\infty$, $0\times\infty$, $0/0$, ∞/∞, 1^∞, ∞^0) のとき極限値は任意の値を取りうるのですが，この極限値を導関数の極限によって求めることができます.

定理. (ロピタルの定理)

(1) $f(x),g(x)$ は $x=a$ の近くで連続，$x=a$ を除いて微分可能，$x=a$ の近くで $g'(x)\neq 0$，かつ $\underline{f(a)=g(a)=0}$ とする．もし極限値 $\ell=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ $(-\infty\leq\ell\leq\infty)$ が<u>存在する</u>ならば，$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ も存在して ℓ に等しい.
(2) $f(x),g(x)$ は $x=a$ を除いて微分可能，$x=a$ の近くで $g'(x)\neq 0$，かつ $x\to a$ のとき $\underline{g(x)\to\infty}$ とする．もし極限値 $\ell=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ $(-\infty\leq\ell\leq\infty)$ が<u>存在する</u>ならば，$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ も存在して ℓ に等しい.

ロピタルの定理は $\frac{f(x)}{g(x)}$ が $x=a$ で不定形でないと，正しい極限値が求まりません．また $x\to a\pm 0$ や $x\to\pm\infty$ でも同様に成り立ちます.

また，導関数の極限 $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ が<u>存在すれば</u>$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ となるので，$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在することをまず示さないと等号が成り立つことが言えません.

[テイラーの定理]

$y=f(x)$ の導関数 $f'(x)$ が $x=x_0$ で微分可能であるとき $f'(x)$ の $x=x_0$ での微分係数が存在します．これを $f(x)$ の**第２次の微分係数**といいます．

区間 I 上で定義された関数 $f(x)$ が I 上微分可能で任意の $x_0 \in I$ で $f'(x)$ が微分可能であるとき，$f'(x)$ の導関数を $f''(x)$ と書き，これを**2 階導関数**といいます．同様に $f(x)$ が n 回微分可能であるとき $f(x)$ を n 回微分して得られる関数を **n 階導関数**といい，$f^{(n)}(x)$ で表します．また $y=f(x)$ の n 階導関数は

$$\frac{d^n f}{dx^n}(x)\ \frac{d^n}{dx^n}f(x)\ y^{(n)},\ \frac{d^n y}{dx^n},\ \frac{d^n}{dx^n}y$$

のようにも表します．2 階以上の導関数を**高階導関数**といいます．また，区間 I 上定義された関数 $f(x)$ が I 上で n 回微分可能で $f^{(n)}(x)$ が連続であるとき $f(x)$ は I 上で **C^n 級**であるといいます．$f(x)$ が I 上で何回でも微分可能であるとき $f(x)$ は I 上で **C^∞ 級**であるといいます．

定理．(ライプニッツの公式)

$f(x), g(x)$ は n 回微分可能とする．このとき ${}_nC_k$ を二項係数として

$$(f(x)g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x).$$

関数 $f(x)$ が n 回微分可能であるとき平均値の定理を拡張でき，$f(x)$ を多項式で近似することができます．

定理．(テイラーの定理)

関数 $f(x)$ は区間 $[a,b]$ 上で n 回微分可能とする．このとき $a<c<b$ をみたすある c で

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + R_n,$$

$$R_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n$$

と表される．

$x=a$ を内部に含む区間で n 回微分可能のとき，$b=x$ として，ある $0<\theta<1$ (θ は x の値によって変わる) で

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + R_n(x),$$

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a+\theta(x-a))$$

と表すことができます．上の $R_n(x)$ を**ラグランジュの剰余項**といいます．また $R_n(x)$ は

$$R_n(x) = \frac{(1-\theta)^{n-1}(x-a)^n}{(n-1)!}f^{(n)}(a+\theta(x-a)),\ (0<\theta<1)$$

と表すこともでき，これを**コーシーの剰余項**といいます．

$n\to\infty$ のとき $R_n(x)\to 0$ であるならば $f(x)$ は $x=a$ の近くで**テイラー展開可能**であるといいます．$f(x)$ が $x=a$ の近くでテイラー展開可能のとき $f(x)$ は $x=a$ の近くでべき級数 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ と表されます．これを $f(x)$ の $x=a$ の近くでの**テイラー展開**といいます．特に $a=0$ のときは**マクローリン展開**と呼びます．

[テイラーの定理の応用]

定義. (ランダウの記号)

$x=a$ の近くで定義された関数 $f(x), g(x)$ について,

(1) $g(x)=O(f(x))\ (x\to a) \iff \dfrac{g(x)}{f(x)}$ が $x=a$ の近くで有界.

(2) $g(x)=o(f(x))\ (x\to a) \iff \displaystyle\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}=0.$

ランダウの記号を用いると $f(x)$ が C^n 級のときテイラーの定理は

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+o((x-a)^n)\quad(x\to a)$$

と表されます．またこれらの展開式から $f(x)$ と $g(x)$ の積や合成などのテイラー展開も多項式の積や合成として計算することができます．また，ランダウの記号を用いて表すときは大文字の O と小文字の o を区別して書きましょう．

また $f(x), g(x)$ が $x=a$ の近くでテイラー展開可能で，$a_n\neq 0, b_m\neq 0$ として

$$f(x)=a_n(x-a)^n+o((x-a)^n),\quad g(x)=b_m(x-a)^m+o((x-a)^m)\ (x\to a)$$

と表される場合は

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{a_n(x-a)^n+o((x-a)^n)}{b_m(x-a)^m+o((x-a)^m)}$$

からも求めることができます．

関数の増減は導関数で表されますから，関数の極大，極小を導関数を用いて表すことができます．

定義. (極大・極小)

関数 $f(x)$ は $x=c$ を含むある区間で定義されているとする．$f(x)$ が $x=c$ の近くでは $x=c$ を除いて $f(x)<f(c)$ (あるいは $f(x)>f(c)$) であるとき関数 $f(x)$ が $x=c$ で**極大** (**極小**) であるといい，この値 $f(c)$ を**極大値** (**極小値**) という．

極大値，極小値を合わせて**極値**といいます．$f(x)$ が微分可能であるとき極値は次のようにして分かります．

定理. (極値)

$f(x)$ は $x=c$ の近傍で C^n 級で $f'(c)=f''(c)=\cdots=f^{(n-1)}(c)=0$ かつ $f^{(n)}(c)\neq 0$ とする．このとき

(1) n が偶数のとき $f(x)$ は $x=c$ で極値をとり，$f^{(n)}(c)>0$ のとき極小，$f^{(n)}(c)<0$ のとき極大である．

(2) n が奇数のとき $f(c)$ は $f(x)$ の極値ではない．

次のテイラー展開は収束する範囲も込めて覚えておきましょう．

(1) $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+\cdots\ (x\in\mathbb{R}).$

(2) $\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}+\cdots+(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots\ (x\in\mathbb{R}).$

(3) $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+\cdots+(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots\ (x\in\mathbb{R}).$

(4) $\log(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}+\cdots\ (|x|<1).$

(5) $(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\dfrac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots\ (|x|<1).$

[定積分]

閉区間 $I=[a,b]=\{x\in\mathbb{R}\mid a\le x\le b\}$ に対して点 $x_0,\dots,x_n$ を

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

であるように**任意に**とります．これらの点を用いて区間 I を n 個の閉区間 $I_k=[x_{k-1},x_k]$, $(k=1,\dots,n)$ に分けることができます．これを区間 I の**分割**といい Δ で表します．また $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$, $(k=1,\dots,n)$ とおいて $|\Delta|=\max\limits_{1\le k\le n}\{\Delta x_k\}$ を分割 Δ の**幅**といいます．

関数 $f(x)$ を閉区間 $I=[a,b]$ 上の有界な関数とします．I の分割 Δ を上のようにとり，区間 $I_k=[x_{k-1},x_k]$ での $f(x)$ の上限を $M_k(f)$，下限を $m_k(f)$ とし，任意の $c_k\in I_k$ に対して

$$R[f,\Delta,\{c_k\}]=\sum_{k=1}^n f(c_k)\Delta x_k,\quad U[f,\Delta]=\sum_{k=1}^n M_k(f)\Delta x_k,\quad L[f,\Delta]=\sum_{k=1}^n m_k(f)\Delta x_k$$

を考えます．すると各 I_k 上で $m_k(f)\le f(x)\le M_k(f)$ ですから $L[f,\Delta]\le R[f,\Delta,\{c_k\}]\le U[f,\Delta]$ となります．$R[f,\Delta,\{c_k\}]$ を $f(x)$ の分割 Δ, 点列 $\{c_k\}$ に関する**リーマン和**といいます．この分割 Δ の取り方を変化させたときの下限・上限をそれぞれ

$$U[f]=\inf_{\Delta}U[f,\Delta],\quad L[f]=\sup_{\Delta}L[f,\Delta]$$

とおくと $L[f]\le U[f]$ となります．この $L[f]$ を $f(x)$ の I における**下積分**，$U[f]$ を $f(x)$ の I における**上積分**といいます．

上積分，下積分はそれぞれ下限，上限で定義されましたが，極限として次の定理が成り立ちます．

定理. (ダルブーの定理)

$f(x)$ が I 上有界とする．$|\Delta|\to 0$ のとき $L[f,\Delta]\to L[f]$, $U[f,\Delta]\to U[f]$.

これより

$$L[f]=\lim_{|\Delta|\to 0}L[f,\Delta]\le\lim_{|\Delta|\to 0}U[f,\Delta]=U[f]$$

であり，$L[f,\Delta]\le R[f,\Delta,\{c_k\}]\le U[f,\Delta]$ なので $L[f]=U[f]$ が成立すればリーマン和は分割 Δ と点列 $\{c_k\}$ の取り方によらずに一定値に収束します．$L[f]=U[f]$ が成立するとき $f(x)$ は I 上**積分可能**あるいは f は I 上**可積分**であるといい，この値 $L[f]=U[f]$ を

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

と表します．$f(x)$ が I 上積分可能のとき積分値は Δ, $\{c_k\}$ の取り方によらないので

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)\frac{b-a}{n}=\int_a^b f(x)\,dx$$

と極限を積分で求めることができます．

関数の積分可能性については次の定理が成り立ちます．

定理. (単調関数)

閉区間 $[a,b]$ 上の単調関数 $f(x)$ は $[a,b]$ 上積分可能である．

定理. (リーマン積分の基本定理)

閉区間で連続な関数はその区間で積分可能である．

分割 Δ の各区間 I_k に対して，I_k における $f(x)$ の**振動量** $\omega_k(f)$ を $\omega_k(f)=M_k(f)-m_k(f)$ とします．すると $S[f,\Delta]-s[f,\Delta]=\sum\omega_k(f)\Delta x_k$ となりますから $|\Delta|\to 0$ のとき $\sum\omega_k(f)\Delta x_k\to 0$ となれば $f(x)$ は I 上積分可能であることがわかります．

[定積分の性質]

閉区間 $I=[a,b]$ 上の単調関数や連続関数は I 上積分可能です．また，区間 $I=[a,b]$ 上で積分可能な関数 $f(x)$ に対して $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx=0, \quad \int_b^a f(x)\,dx=-\int_a^b f(x)\,dx$ と定めます．

定積分について次が成り立ちます．

(1) $f(x)$ が $I=[a,b]$ 上積分可能のとき I に含まれる任意の閉区間でも積分可能．

(2) $f(x)$ が $[a,b]$ 及び $[b,c]$ 上積分可能のとき $[a,c]$ 上でも積分可能で

$$\int_a^c f(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c f(x)\,dx.$$

(3) $f(x)$, $g(x)$ が $[a,b]$ 上積分可能のとき $f(x)+g(x)$, $cf(x)$ (c は定数) も積分可能で

$$\int_a^b f(x)+g(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx, \quad \int_a^b cf(x)\,dx=c\int_a^b f(x)\,dx.$$

(4) $f(x)$, $g(x)$ は $[a,b]$ 上積分可能かつ $f(x)\le g(x)$ のとき $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx\le\int_a^b g(x)\,dx.$

(5) $f(x)$, $g(x)$ が $[a,b]$ 上積分可能のとき

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|\le\int_a^b |f(x)|\,dx, \quad \int_a^b |f(x)\pm g(x)|\,dx\le\int_a^b |f(x)|\,dx+\int_a^b |g(x)|\,dx.$$

(6) (積分の平均値定理) $f(x)$ は $[a,b]$ 上積分可能，$m\le f(x)\le M$ のとき，ある λ で

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lambda(b-a), \quad (m\le\lambda\le M).$$

「原始関数」と「不定積分」を次のように定義します．

定義. (原始関数)

$F(x)$ が関数 $f(x)$ の<u>**原始関数**</u>である $\iff$ $F(x)$ は微分可能で $F'(x)=f(x)$ をみたす．

定義. (不定積分)

$f(x)$ は $I=[a,b]$ で積分可能とする．このとき I 上の関数 $\overline{F}(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$, $(a\le x\le b)$ を $f(x)$ の<u>**不定積分**</u>という．

$f(x)$ は $I=[a,b]$ 上で積分可能とします．このとき次が成り立ちます．

(1) $f(x)$ の不定積分 $\overline{F}(x)$ は I 上連続．

(2) $f(x)$ は $x=x_0\in I$ で連続とすると $f(x)$ の不定積分 $\overline{F}(x)$ は $x=x_0$ で微分可能で $\overline{F}'(x)=f(x)$ をみたす．

(3) したがって，$f(x)$ が I 上連続ならば原始関数を持つ．特にこのとき不定積分が I 上での原始関数を与える．

$f(x)$ の原始関数がわかると次を用いて定積分が計算できます．

定理. (微分積分学の基本定理)

$f(x)$ が $I=[a,b]$ 上積分可能で I 上原始関数 $F(x)$ を持つならば

$$\int_a^b f(x)\,dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a).$$

[線積分]

$I=[\alpha,\beta]$ とし，I 上の C^1 級関数 $x=x(t), y=y(t)$ に対して $\boldsymbol{r}(t)=(x(t),y(t))$ によって表される曲線を $C:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$, $(\alpha\le t\le\beta)$ とします．

C を含む領域 D で定義された関数 $f(x,y)$ は連続とします．このとき合成関数 $f(x(t),y(t))$ も連続関数であり，したがって I 上で積分可能です．

区間 I の分割 Δ: $\alpha=t_0<t_1<\cdots<t_n=\beta$ に対して $I_k=[t_{k-1},t_k]$ とおき，C 上の点を $P_k=\boldsymbol{r}(t_k)$, I_k 上での曲線を $C_k=\boldsymbol{r}(I_k)$ とします．

$$\Delta s_k=\sqrt{(x(t_{k-1})-x(t_k))^2+(y(t_{k-1})-y(t_k))^2},\ (2\text{点 } P_{k-1},P_k \text{ 間の距離})$$

として，任意の $c_k\in I_k$ を 1 つ選び

$$S_{\Delta,\{c_k\}}=\sum_{k=1}^{n}f(x(c_k),y(c_k))\Delta s_k,\ (\text{リーマン和})$$

とおくと $|\Delta|\to 0$ のとき $S_{\Delta,\{c_k\}}$ は収束します．この値を f の C に沿う**線積分**といい $\displaystyle\int_C f\,ds$ で表します．

$\Delta t_k=t_k-t_{k-1}$ とすると平均値の定理から，ある c_x, c_y で

$$x(t_{k-1})-x(t_k)=x'(c_x)\Delta t_k,\ y(t_{k-1})-y(t_k)=y'(c_y)\Delta t_k$$

と表されます．したがって $\Delta s_k=\sqrt{x'(c_x)^2+y'(c_y)^2}\Delta t_k$ より $|\Delta|\to 0$ のとき $ds/dt=\sqrt{x'(t)+y'(t)}$ となります．よって

$$\boxed{\int_C f\,ds=\int_\alpha^\beta f(\boldsymbol{r}(t))\,\|\boldsymbol{r}'(t)\|\,dt=\int_\alpha^\beta f(x(t),y(t))\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,dt}$$

となります．

$\boldsymbol{A}(x,y)=(A_x(x,y),A_y(x,y))$ をベクトル場とします．このとき $\Delta\boldsymbol{r}_k=\boldsymbol{r}(t_k)-\boldsymbol{r}(t_{k-1})$ として内積の和

$$S_{\Delta,\{c_k\}}=\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{A}(x(c_k),y(c_k))\cdot\Delta\boldsymbol{r}_k,$$

を考えることができます．$|\Delta|\to 0$ のときこの和は収束します．この値をベクトル場 $\boldsymbol{A}$ の C に沿う**線積分**といい，$\displaystyle\int_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}$ で表します．また平均値の定理より，ある $c_k\in I_k$ で $\Delta\boldsymbol{r}_k=\boldsymbol{r}'(c_k)\Delta t_k$ と表されるので $|\Delta|\to 0$ のとき $d\boldsymbol{r}/dt=\boldsymbol{r}'(t)$ となります．したがって

$$\boxed{\int_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}=\int_\alpha^\beta \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}(t))\cdot\boldsymbol{r}'(t)\,dt}$$

となります．

[面積分]

$\mathbb{R}^3$ 内の曲面 S 上の連続関数を f とします．S の分割 $\Delta\colon \{S_i\}$ に対して S_i の面積を ΔS_i とします．任意の $Q_i \in S_i$ に対して $R[f,\Delta,\{Q_i\}] = \sum f(Q_i)\Delta S_i$ とおき，$|\Delta| = \max\limits_i\{\Delta S_i\} \to 0$ のときのリーマン和 $R[f,\Delta,\{Q_i\}]$ の極限値を f の S 上の<u>**面積分**</u>といい $\displaystyle\iint_S f\,dS$ で表します．

D を $\mathbb{R}^2$ の領域，$\boldsymbol{r}\colon D \to \mathbb{R}^3$ を C^1 級関数として

$$S = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y,z) = \boldsymbol{r}(u,v),\ (u,v) \in D\Big\} \subset \mathbb{R}^3$$

と表されるとします．このとき $(u_0,v_0) \in D$ に対してテイラーの定理より $\boldsymbol{r}(u_0,v_0)$, $\boldsymbol{r}(u_0+\Delta u,v_0)$, $\boldsymbol{r}(u_0,v_0+\Delta v)$, $\boldsymbol{r}(u_0+\Delta u,v_0+\Delta v)$ で囲まれる部分 S_i の面積 ΔS_i は 2 つのベクトル $\dfrac{\partial\boldsymbol{r}(u_0,v_0)}{\partial u}\Delta u$, $\dfrac{\partial\boldsymbol{r}(u_0,v_0)}{\partial v}\Delta v$ で張られる平行四辺形の面積で近似されます．したがって $\Delta S_i \simeq \left\|\dfrac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u}\times\dfrac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v}\right\|\Delta u\Delta v$ (ただし $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ はベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の外積で，$\|\boldsymbol{a}\|$ はベクトル $\boldsymbol{a}$ の長さ) と表されます．よって S 上の連続関数 f に対して

$$\boxed{\iint_S f\,dS = \iint_D f(\boldsymbol{r}(u,v))\left\|\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v}\right\|du\,dv}$$

となります．特に $\boldsymbol{r}(x,y) = (x,y,z(x,y))$ と表されるとき $\dfrac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial x}\times\dfrac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial y} = (-z_x,-z_y,1)$ なので

$$\iint_S f\,dS = \iint_D f(x,y,z)\sqrt{z_x^2+z_y^2+1}\,dx\,dy$$

となります．

$\boldsymbol{A}$ を S を含む領域で定義されたベクトル場とし，S の点 P における単位法線ベクトルを $\boldsymbol{n}(P)$ とします．このとき $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{n}$ の内積 $f(P) = \boldsymbol{A}(P)\cdot\boldsymbol{n}(P)$ の面積分をベクトル場 $\boldsymbol{A}$ の<u>**$\boldsymbol{n}$ で定められた側の S 上の面積分**</u>といい $\displaystyle\iint_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\,dS$ で表します．特に S が $\boldsymbol{r}(u,v)$ と表されているとき

$$\boldsymbol{n} = \frac{\partial\boldsymbol{r}/\partial u\times\partial\boldsymbol{r}/\partial v}{\|\partial\boldsymbol{r}/\partial u\times\partial\boldsymbol{r}/\partial v\|}$$

なので

$$\boxed{\iint_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\,dS = \iint_D \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}(u,v))\cdot\left(\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v}\right)du\,dv}$$

となります．特に $\boldsymbol{r} = (x,y,z(x,y))$ であるとき

$$\iint_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\,dS = \iint_D (-A_xz_x - A_yz_y + A_z)\,dx\,dy$$

です．

[多変数の極限]

これまでは１変数の関数でしたが，多変数 (主に２変数) の関数についても考えていきます．

１変数のときには極限は $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ のように表されていましたが，ここでの $|x-y|$ は実数 x, y の数直線上での距離です．そこで n 次元空間 $\mathbb{R}^n$ 上の２点についても同様に「近づく」ことを距離で表します．

$\mathbb{R}^n$ 上の２点 $X = (x_1, \ldots, x_n), Y = (y_1, \ldots, y_n)$ に対して X, Y の距離 $d(X, Y)$ を

$$d(X,Y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

と定めます．特に $n = 2$ のときは $d(X,Y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2}$ です．

$X \in \mathbb{R}^n$ に対して $U_r(X) = \{Y \in \mathbb{R}^n \mid d(X,Y) < r\}$ を X の **r 近傍**といいます．D を $\mathbb{R}^n$ の部分集合とします．$X \in \mathbb{R}^n$ に対して $U_r(X) \subset D$ となる $r > 0$ が存在するとき X は D の**内点**であるといいます．$X \in \mathbb{R}^n$ に対して $U_r(X) \cap D = \emptyset$ となる $r > 0$ が存在するとき X は D の**外点**であるといいます．D の内点でも外点でもない点を D の**境界点**といいます．

D の全ての点が D の内点であるとき D は**開集合**であるといいます．D の補集合が開集合であるとき D は**閉集合**であるといいます．

定義. (収束)

> 点列 $\{X_m\}$ が点 P に**収束**する．
> $\Longleftrightarrow$ 任意の $\varepsilon > 0$ に対してある自然数 N が存在して，任意の $m \in \mathbb{N}$ に対して，$m \geq N$ ならば $d(X_m, P) < \varepsilon$ をみたす．

点列 $\{X_m\}$ が点 P に収束しているとき P をその**極限点**といい，$\displaystyle\lim_{m\to\infty} X_m = P$ とか $X_m \to P \ (m \to \infty)$ で表します．点列の極限点は存在すれば唯一です．つまり点列 $\{X_m\}$ が収束して $X_m \to P$ かつ $X_m \to Q$ となるとき $P = Q$ です．また収束する点列の任意の部分点列は同じ極限点に収束します．

O を $\mathbb{R}^n$ の原点とします．点列 $\{X_m\}$ に対して，ある $R \in \mathbb{R}$ が存在して $\{X_m \mid m \in \mathbb{N}\} \subset U_R(O)$ が成り立つとき点列 $\{X_m\}$ は**有界**であるといいます．点列 $\{X_m\}$ が収束するなら集合 $\{X_m\}$ は有界です．この逆は成立しませんが次が成り立ちます．

定理. (ボルツァノ・ワイエルストラス)

> 有界な点列は収束する部分点列をもつ．

これより点列 $\{X_m\}$ が有界のとき，ある狭義単調増加な自然数列 $m_1 < m_2 < \cdots < m_i < \ldots$ が存在して部分点列 $\{X_{m_i}\}_{i=1}^{\infty}$ が収束します．

また数列と同様にコーシーの収束判定が成り立ちます．

定理. (コーシーの収束判定)

> 点列 $\{X_n\}$ が収束する．
> $\Longleftrightarrow$ 任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $N \in \mathbb{N}$ が存在して，任意の $m, k \in \mathbb{N}$ に対して，$m, k \geq N$ ならば $d(X_m, X_k) < \varepsilon$ である．

[多変数関数]

$\mathbb{R}^n$ の部分集合 D 上で定義された関数を $f(X)$ とします．X が平面上の点 $X=(x,y)$ のとき $f(X)$ を $f(x,y)$ のように表します．

定義. (関数の極限)

> $f(X)$ が $X\to X_0$ のとき A に**収束**する
> $\Longleftrightarrow$ 任意の $\varepsilon>0$ に対してある $\delta>0$ が存在して，任意の $X\in D$ に対して，$0<d(X,X_0)<\delta$ ならば $|f(X)-A|<\varepsilon$ が成り立つ．

$X\to X_0$ のとき $f(X)$ が A に収束するとき $\displaystyle\lim_{X\to X_0} f(X)=A$ とか $f(X)\to A\ (X\to X_0)$ で表します．また X が平面上の点のときは $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ のように表すこともあります．ここでの X の X_0 への近づき方は各座標軸に沿った近づき方だけでなく，どんな近づき方をしても収束することを意味します．

$X_0\in D$ であり $X\to X_0$ のとき $f(X)\to f(X_0)$ が成り立つとき $f(X)$ は $X=X_0$ で**連続**であるといいます．したがって次のように表すことができます．

定義. (関数の連続性)

> $f(X)$ が X_0 で**連続**である
> $\Longleftrightarrow$ 任意の $\varepsilon>0$ に対してある $\delta>0$ が存在して，任意の $X\in D$ に対して，$d(X,X_0)<\delta$ ならば $|f(X)-f(X_0)|<\varepsilon$ が成り立つ．

$f(X)$ が D の全ての点で連続のとき $f(X)$ は **D 上連続**といいます．1 変数関数と同様に連続関数の和積や合成は連続となります．

(1) $f(X), g(X)$ は $X_0\in D$ で連続, $c\in\mathbb{R}$ は定数とします．このとき $f(X)\pm g(X), cf(X)$, $f(x)g(x)$ も $X=X_0$ で連続であり，$g(X_0)\neq 0$ なら $f(X)/g(X)$ も $X=X_0$ で連続です．

(2) $f_1(X),\dots,f_m(X)$ は D 上連続で，φ は $E\subset\mathbb{R}^m$ 上連続とします．
D 上 $(f_1(X),\dots,f_m(X))\in E$ なら合成関数 $\varphi(f_1(X),\dots,f_m(X))$ は D 上連続です．

定理. (最大値・最小値定理)

> 有界閉集合 D 上の連続関数 $f(X)$ は D 上有界で，D 上で最大値・最小値をとる．

$f(X)$ は D 上連続とします．したがって任意の $X_0\in D$ と任意の $\varepsilon>0$ に対してある $\delta>0$ が存在して $d(X,X_0)<\delta$ のとき $|f(X)-f(X_0)|<\varepsilon$ が成り立ちます．この δ が X_0 によらずに選べるとき D 上**一様連続**といいます．

定義. (一様連続)

> $f(X)$ は D 上一様連続
> $\Longleftrightarrow$ 任意の $\varepsilon>0$ に対してある $\delta>0$ が存在して，任意の $X,X_0\in D$ に対して，$d(X,X_0)<\delta$ ならば $|f(X)-f(X_0)|<\varepsilon$ が成り立つ．

特に有界閉集合上の連続関数は一様連続です．

D 内の任意の 2 点 X, Y に対して X と Y を結ぶ曲線が存在するとき D は**(弧状) 連結**であるといいます．D が連結で $f(X)$ が連続のとき中間値の定理が成り立ちます．

定理. (中間値の定理)

> D は連結とし $f(X)$ は D 上連続とする．$X_1,X_2\in D$ とし $f(X_1)\neq f(X_2)$ とすると $f(X)$ は D 上で $f(X_1)$ と $f(X_2)$ の間の値を全てとる．

連結な開集合を**領域**といいます．領域 D と D の境界点全体の和集合として表されるものを**閉領域**といいます．

[全微分]

多変数関数では偏導関数の他に全微分と呼ばれるものも存在します.

$f(x,y)$ は点 (a,b) の近傍で定義されているとします．ある定数 A,B が存在して

$$f(a+h,b+k)-f(a,b)=Ah+Bk+\varepsilon\sqrt{h^2+k^2}$$

と h,k の関数 $\varepsilon=\varepsilon(h,k)$ をおくとき $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)}\varepsilon=0$ となるならば $f(x,y)$ は (a,b) で**全微分可能**であるといいます.

$f(x,y)$ が (a,b) で全微分可能とすると $k=0$ として

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{Ah+\varepsilon\sqrt{h^2}}{h}=\lim_{h\to 0}\left(A+\varepsilon\frac{|h|}{h}\right)$$

となり，$h\neq 0$ のとき $\dfrac{|h|}{h}=\pm 1$ であり $(h,0)\to(0,0)$ のとき $\varepsilon\to 0$ ですから

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}=\lim_{h\to 0}\left(A+\varepsilon\frac{|h|}{h}\right)=A$$

となります．したがって $f(x,y)$ は (a,b) で x 方向に偏微分可能で $A=f_x(a,b)$ となります．同様にして $f(x,y)$ は (a,b) で y 方向にも偏微分可能で $B=f_y(a,b)$ となることもわかります.

逆に $f(x,y)$ が (a,b) で偏微分可能で

$$\lim_{(h,k)\to(a,b)}\frac{f(a+h,b+k)-f(a,b)-f_x(a,b)h-f_y(a,b)k}{\sqrt{h^2+k^2}}=0$$

となるとき $A=f_x(a,b),B=f_y(a,b)$ と取ることができますから $f(x,y)$ は (a,b) で全微分可能です．このことから次がわかります.

命題. (全微分可能性)

$f(x,y)$ は (a,b) で偏微分可能であるとする．$f(x,y)$ が (a,b) で全微分可能であることと

$$\lim_{(h,k)\to(a,b)}\frac{f(a+h,b+k)-f(a,b)-f_x(a,b)h-f_y(a,b)k}{\sqrt{h^2+k^2}}=0$$

が成立することは同値.

とくに $f(x,y)$ が C^1 級であるとき $f(x,y)$ は全微分可能となります．このとき x, y の増分 h,k をそれぞれ Δx, Δy で表すと

$$\Delta f=f(a+\Delta x,b+\Delta y)-f(a,b)=f_x(a,b)\Delta x+f_y(a,b)\Delta y+\varepsilon\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$$

となりますから $|\Delta x|,|\Delta y|$ が十分小さいとき

$$\Delta f\sim f_x(a,b)\Delta x+f_y(a,b)\Delta y$$

と近似できます．これを形式的に

$$df=f_x(a,b)dx+f_y(a,b)dy$$

と表し，$f(x,y)$ の (a,b) における**全微分**と呼びます.

$f(x,y)$ が (a,b) で全微分可能であることと $f(x,y)$ が点 (a,b) において接平面 $z=f(a,b)+f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)$ を持つことは同値です.

[方向微分]

$f(x_1,\dots,x_n)$ を $\mathbb{R}^n$ 上の偏微分可能な関数とします．このとき点 $P=(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n$ に対して，ベクトル $\operatorname{grad} f(P)$ を

$$\operatorname{grad} f(P) = {}^t\!\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(P),\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(P)\right)$$

と定めます．これを $f(x_1,\dots,x_n)$ の P における**勾配**と呼びます．

$f(x_1,\dots,x_n)$ を $\mathbb{R}^n$ 上の関数とします．またベクトル $\boldsymbol{e}={}^t(e_1,\dots,e_n)$ は $\sqrt{e_1^2+\cdots+e_n^2}=1$ をみたすとします．このような長さ 1 のベクトルを**単位ベクトル**といいます．t を変数として

$$P(t)=(a_1,\dots,a_n)+t(e_1,\dots,e_n)$$

を考えると，これは点 P を通る直線を表します．このとき極限値

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(P(t))-f(P)}{t}$$

が存在するとき，この値を $f(x_1,\dots,x_n)$ の P における**$\boldsymbol{e}$ 方向微分係数**といいます．

いま $f(x_1,\dots,x_n)$ は $P=(a_1,\dots,a_n)$ で全微分可能とします．このときベクトル $\boldsymbol{u}={}^t(u_1,\dots,u_n)\neq\boldsymbol{o}$ に対して

$$\begin{aligned}&f(a_1+tu_1,\dots,a_n+tu_n)-f(a_1,\dots,a_n)\\&=f_{x_1}(a_1,\dots,a_n)tu_1+\cdots+f_{x_n}(a_1,\dots,a_n)tu_n+|t|\varepsilon\sqrt{u_1^2+\cdots+u_n^2}\end{aligned}$$

と表したとき $\displaystyle\lim_{t\to 0}\varepsilon=0$ となります．このとき $\boldsymbol{e}=\dfrac{\boldsymbol{u}}{\sqrt{u_1^2+\cdots+u_n^2}}$ に対して $\boldsymbol{e}={}^t(e_1,\dots,e_n)$ は単位ベクトルで，$\boldsymbol{e}$ 方向微分係数は

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to 0}\frac{f(P(t))-f(P)}{t}\\&=\lim_{t\to 0}\frac{f_{x_1}(a_1,\dots,a_n)te_1+\cdots+f_{x_n}(a_1,\dots,a_n)te_n+|t|\varepsilon}{t}\\&=f_{x_1}(a_1,\dots,a_n)e_1+\cdots+f_{x_n}(a_1,\dots,a_n)e_n\\&=\operatorname{grad} f(a_1,\dots,a_n)\cdot\boldsymbol{e}\end{aligned}$$

と表されます．したがって $f(x_1,\dots,x_n)$ が P で全微分可能のとき，単位ベクトル $\boldsymbol{e}$ に対して $f(x_1,\dots,x_n)$ の P における $\boldsymbol{e}$ 方向微分係数は内積

$$\operatorname{grad} f(P)\cdot\boldsymbol{e}$$

で与えられます．

[多変数のテイラーの定理]

変数関数 $f(x)$ が $x=a$ の近くで C^n 級のとき，ある $0<\theta<1$ で

$$f(a+h)=f(a)+h\frac{d}{dx}f(a)+\cdots+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}f(a)+\frac{h^n}{n!}\frac{d^n}{dx^n}f(a+\theta h)$$

と表されました．2 変数関数に対しても 1 変数のときと同様に多項式で近似することができます．C^n 級関数 $f(x,y)$ に対して $r\leq n$ のとき形式的に

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^r f(x,y)=\sum_{i=0}^{r}{}_rC_i h^{r-i}k^i\frac{\partial^r}{\partial x^{r-i}\partial y^i}f(x,y)$$

と記号 $\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^r$ を定めます．ここで ${}_rC_i$ は二項係数 ${}_rC_i=\dfrac{r!}{i!(r-i)!}$ です．このとき次が成り立ちます．

定理. (テイラーの定理)

関数 $f(x,y)$ は領域 D で C^n 級とし，線分 $\{(a+ht,b+kt)\mid 0\leq t\leq 1\}$ は D に含まれるとする．このとき

$$\begin{aligned}f(a+h,b+k)&=f(a,b)+\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(a,b)+\cdots\\&\quad+\frac{1}{(n-1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n-1}f(a,b)+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(a+\theta h,b+\theta k)\end{aligned}$$

となる $(0<\theta<1)$ が存在する．

特に $f(x,y)$ が $(0,0)$ を内部に含む領域 D で C^n 級とします．このときテイラーの定理より $(0,0)$ の近くで $r=\sqrt{x^2+y^2}$ として

$$\begin{aligned}f(x,y)=&f(0,0)+(f_x(0,0)x+f_y(0,0)y)+\frac{1}{2}\left(f_{xx}(0,0)x^2+2f_{xy}(0,0)xy+f_{yy}(0,0)y^2\right)\\&+\cdots+\frac{1}{n!}\left(f_{x\dots x}(0,0)x^n+nf_{x\dots xy}(0,0)x^{n-1}y+\cdots+f_{y\dots y}(0,0)y^n\right)+o\left(r^n\right)\end{aligned}$$

と表されます．これを $f(x,y)$ の**有限マクローリン展開**と呼びます．

有限マクローリン展開可能な関数 $f(x,y)$ が

$$\begin{aligned}f(x,y)=&a_{00}+(a_{10}x+a_{12}y)+\frac{1}{2}\left(a_{20}x^2+2a_{11}xy+a_{02}y^2\right)\\&+\cdots+\frac{1}{n!}\left(a_{n0}x^n+na_{n-1\,1}x^{n-1}y+\cdots+a_{0n}y^n\right)+o\left(r^n\right)\end{aligned}$$

と表されたとします．このとき $a_{ij}=\dfrac{\partial^{i+j}}{\partial x^i\partial y^j}f(0,0)$ となります．したがって $f(x,y)$ を上のように多項式展開できたとき，それが $f(x,y)$ の有限マクローリン展開を与えます．

[陰関数定理]

変数関数 $F(x,y)$ に対してそのグラフ $G=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid F(x,y)=0\}$ を考えます．G が空集合でないとき，G の点の x 座標のなす集合を U とします．このとき $a\in U$ に対して，ある b で $(a,b)\in G$ となるものが存在しますから対応

$$U\ni a\mapsto \text{「}(a,b)\in G \text{ となる } b\text{」}=\text{「}F(a,b)=0 \text{ をみたす } b\text{」}$$

を考えることができます.

そこで関数 $F(x,y)$ に対して

$$U=\{x\in\mathbb{R}\mid \text{ある } y\in\mathbb{R} \text{ が存在して } F(x,y)=0\}$$

とおき，関数 $f\colon U\to\mathbb{R}$ を

$$f(x)=\text{「}F(x,y)=0 \text{ をみたす } y \text{ のうちの 1 つ」}$$

と定めます．この関数 $f(x)$ を関係式 $F(x,y)=0$ の定める**陰関数**といいます.

一般に $F(x,y)$ の陰関数 $f(x)$ は連続とは限りませんが，関係式 $F(x,y)$ が良い条件を持ち，U が十分小さいとき，微分可能な関数として $f(x)$ を定めることができます.

定理. (陰関数定理)

$F(x,y)$ は点 (a,b) の近傍で定義された C^1 級関数とし，点 (a,b) で $F(a,b)=0$, $F_y(a,b)\neq 0$ をみたすとする．このとき $x=a$ を含む開区間 I と $\delta>0$ をうまく取れば，各 $x\in I$ に対して $F(x,y)=0$, $|y-b|<\delta$ をみたす y がただ 1 つ定めることができる．この I 上の関数 $y=f(x)$ は C^1 級で，その導関数は次のように表される.

$$f'(x)=-\frac{F_x(x,f(x))}{F_y(x,f(x))},\quad \frac{dy}{dx}=-\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y}.$$

一般に $F(x,y)$ が C^n 級のとき陰関数 $f(x)$ も C^n 級となります.

$F(x,y)=x^2+y^2-1$ とします．$P=(0,1)$ に対して $F(0,1)=0$, $F_y(0,1)=2$ ですから $(0,1)$ の近くで $F(x,y)$ は陰関数 $y=f(x)$ を持ちます．実際 $y=\sqrt{1-x^2}$ が $F(x,y)=0$ の定める陰関数です．しかし $Q=(-1,0)$ では $F(-1,0)=0$, $F_y(-1,0)=0$ なので y は $x=-1$ を含む開区間上の関数として表すことはできません．しかし $F_x(-1,0)=-2$ なので x を y の関数として表すことができます．この場合 $x=-\sqrt{1-y^2}$ と表されます.

さらに開区間 $U=(-1,1)$ において $F(x,y)=0$ は $y=\sqrt{1-x^2}$ という陰関数を持ちます．この導関数は $y'=-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ です．いま $F_x(x,y)=2x$, $F_y(x,y)=2y$, $y=\sqrt{1-x^2}$ なので

$$y'=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{x}{y}=-\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}$$

となっています.

[極値]

$\mathbb{R}^n$ 上の関数 $f(X)$ が P を含む領域で定義されているとします．P を含む十分小さい領域内の全ての X に対して $f(X) \leq f(P)$ が成り立っているとき $f(X)$ は P で**広義の極大**になるといい，$f(P)$ を**広義の極大値**と言います．さらに $X \neq P$ に対して $f(X) < f(P)$ となるとき，$f(X)$ は P で**極大**であるといい，$f(P)$ を**極大値**と言います．同様に不等号の向きを逆にして**広義の極小**などが定義されます．(広義の) 極大値・極小値を総称して (広義の) **極値**と呼びます．

$X = (x_1, \ldots, x_n)$ とし $f(X)$ が $P = (a_1, \ldots, a_n)$ で偏微分可能で，$X = P$ で極値をとるとします．このとき $f_i(x_i) = f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n)$ は $x_i = a_i$ で微分可能で，そこで極値をとるので $f_i'(a_i) = 0$ となります．したがって $f_{x_i}(P) = 0$ をみたします．これがすべての i で成立するので

$$f_{x_1}(P) = \cdots = f_{x_n}(P) = 0$$

となります．したがって

$$f(X) \text{ が } X = P \text{ で極値をとり，} X = P \text{ で偏微分可能ならば } \operatorname{grad} f(X) = \boldsymbol{o}$$

となります．これより $\operatorname{grad} f(P) = \boldsymbol{o}$ となる点 P は極値の**候補**です．極値になるかどうかは 2 階偏微分係数を用いて調べることができます．特に 2 変数関数 $f(x, y)$ については次で判定ができます．

定理. (極値)

関数 $f(x, y)$ は点 $P = (a, b)$ の近くで C^2 級とし，$\operatorname{grad} f(P) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ とする．
$H = f_{xx}(P) f_{yy}(P) - f_{xy}(P)^2$ とおく．このとき
(1) $H > 0$ かつ $f_{xx}(P) > 0$ ならば f は P で極小,
(2) $H > 0$ かつ $f_{xx}(P) < 0$ ならば f は P で極大,
(3) $H < 0$ ならば $f(P)$ は極値ではない.

(1) $f(x, y) = x^2 + y^2$ とします．このとき $\operatorname{grad} f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$ なので $\operatorname{grad} f(P) = \boldsymbol{o}$ となるのは $P = (0, 0)$ です．$f_{xx}(0, 0) = 2$, $f_{yy}(0, 0) = 2$, $f_{xy}(0, 0) = 0$ より $H = 4$ となります．したがって $H = 4 > 0$, $f_{xx}(0, 0) = 2 > 0$ なので $P = (0, 0)$ で極小値をとります．

(2) $g(x, y) = -x^2 - y^2$ とします．このとき $\operatorname{grad} g(x, y) = \begin{pmatrix} -2x \\ 2y \end{pmatrix}$ なので $\operatorname{grad} g(P) = \boldsymbol{o}$ となるのは $P = (0, 0)$ です．$g_{xx}(0, 0) = -2$, $g_{yy}(0, 0) = -2$, $g_{xy}(0, 0) = 0$ より $H = 4$ となります．したがって $H = 4 > 0$, $g_{xx}(0, 0) = -2 < 0$ なので $P = (0, 0)$ で極大値をとります．

(3) $h(x, y) = x^2 - y^2$ とします．このとき $\operatorname{grad} h(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \end{pmatrix}$ なので $\operatorname{grad} h(P) = \boldsymbol{o}$ となるのは $P = (0, 0)$ です．$h_{xx}(0, 0) = 2$, $h_{yy}(0, 0) = -2$, $h_{xy}(0, 0) = 0$ より $H = -4$ となります．したがって $H = 4 < 0$ なので $h(0, 0) = 0$ は極値ではありません．実際 $y = 0$ のとき $h(x, 0) = x^2$ は $x = 0$ で極小，$x = 0$ のとき $h(0, y) = -y^2$ は $y = 0$ で極大なので $P = (0, 0)$ の近くで $h(0, 0) = 0$ より大きい値も小さい値も取ります．

この H を**ヘッシアン**といい，$\operatorname{Hess} f(P)$ で表します．なお，$H = 0$ の場合は上の定理では極値かどうかわかりません．極値の場合 ($f(x, y) = x^4 + y^4$, $P = (0, 0)$) もありますし，極値ではない場合 ($f(x, y) = x^3 + y^3$, $P = (0, 0)$) もあります．このような場合は P を通る直線に沿って，あるいは P を中心とする極座標をとって極値の定義の条件をみたすか調べます．

多変数関数 $f(X)$ に関しても同様にして P での 2 階偏微分係数たちで極値かどうかを判定することができます．

[条件付き極値]

$\varphi(x,y)$, $f(x,y)$ は C^1 級関数とします．変数 (x,y) が $\varphi(x,y)=0$ をみたしながら動くときの $f(x,y)$ の極値を調べます．(x,y) の動きに条件 $\varphi(x,y)=0$ が付くのでこのような極値を**条件付き極値**と呼びます．

定理. (条件付き極値)

> (x,y) が条件 $\varphi(x,y)=0$ をみたしながら動くとき，$f(x,y)$ が (a,b) で広義の極値をとるならば
>
> (1) $\operatorname{grad}\varphi(a,b)=\boldsymbol{o}$ であるか,
> (2) $\operatorname{grad} f(a,b)=\lambda\varphi(a,b)$ をみたす定数 λ が存在する.

この定理より$\underline{\varphi(a,b)=0}$で

(1) $\operatorname{grad}\varphi(a,b)=\boldsymbol{o}$ をみたす点 (a,b) と
(2) ある λ で $\operatorname{grad} f(a,b)=\lambda\varphi(a,b)$ となる点 (a,b)

は極値の候補です．このようにして極値の候補を求める方法を**ラグランジュの乗数法**といいます．$\operatorname{grad}\varphi(a,b)\neq\boldsymbol{o}$ のとき x または y は (a,b) の近くで陰関数として表されます．$y=y(x)$ とすると $f(x,y)=f(x,y(x))$ は x の関数として表されるので 1 変数関数として極値を調べることができます．

多変数でも同様なことが成り立ちます．

$\varphi(x,y,z)$, $f(x,y,z)$ は C^1 級関数とします．x,y,z が条件 $\varphi(x,y,z)=0$ をみたすときの $f(x,y,z)$ の極値を考えます．つまり関数 $f(x,y,z)$ を $\varphi(x,y,z)=0$ で定められた曲面 S 上に制限して，S 上の関数と見たときの $f(x,y,z)$ の極値を考えます．このとき f の極値をとる点の**候補**は次で与えられます．

定理. (条件付き極値)

> $\varphi(x,y,z)$, $f(x,y,z)$ を C^1 級関数とする．点 (x,y,z) が $\varphi(x,y,z)=0$ をみたしながら変わるとき，$f(x,y,z)$ が P で広義の極値をとるならば
>
> (1) $\operatorname{grad}\varphi(P)=\mathbf{o}$ であるか,
> (2) $\operatorname{grad} f(P)=\lambda\operatorname{grad}\varphi(P)$ をみたす定数 λ が存在する.

C^1 級関数 $\varphi(x,y,z)$ に対して $\operatorname{grad}\varphi(x,y,z)=\boldsymbol{o}$ となる $\varphi(x,y,z)=0$ をみたす点を $S=\{X\in\mathbb{R}^3\mid\varphi(X)=0\}$ の**特異点**といいます．この定理より $\varphi(x,y,z)=0$ 上での $f(x,y,z)$ の極値の候補は S の特異点か，$\operatorname{grad}\varphi$ と $\operatorname{grad} f$ が平行となる点です．

$\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_r\in\mathbb{R}^n$ とします．ある定数 $(c_1,\dots,c_r)\neq(0,\dots,0)$ が存在して $c_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+c_r\boldsymbol{a}_r=\boldsymbol{o}$ となるとき $\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_r$ は**1次従属**であるといいます．

定理. (2条件付き極値)

> $\varphi(x,y,z)$, $\psi(x,y,z)$, $f(x,y,z)$ を C^1 級関数とする．点 (x,y,z) が $\varphi(x,y,z)=\psi(x,y,z)=0$ をみたしながら変わるとき，$f(x,y,z)$ が P で広義の極値をとるならば
>
> (1) $\operatorname{grad}\varphi(P),\operatorname{grad}\psi(P)$ は1次従属であるか,
> (2) $\operatorname{grad} f(P)=\lambda\operatorname{grad}\varphi(P)+\mu\operatorname{grad}\psi(P)$ をみたす定数 λ,μ が存在する.

いずれの場合も $\underline{\varphi(P)=\psi(P)=0}$ でなければなりません．この条件も忘れずに確かめましょう．

[正項級数]

級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ は**正項級数**とします．つまり全ての a_n は $a_n \geq 0$ であるとします．正項級数の収束・発散は次のようにして判定できます．以下 $\sum a_n$ は全て正項級数とします．

定理. (実数の連続性による判定)

正項級数 $\sum a_n$ はその部分和列 $\left\{S_k = \sum\limits_{n=1}^{k} a_n\right\}_{k=1}^{\infty}$ が有界ならば収束し，有界でなければ ∞ に発散する．

定理. (比較判定法)

$a_n, b_n > 0$ とする．ある定数 K が存在して，十分大きな n に対して $a_n \leq K b_n$ が成り立っているとき，$\sum b_n$ が収束すれば $\sum a_n$ も収束する．

つまり，ある K とある N が存在して「$n \geq N$ ならば $a_n \leq K b_n$」が成り立っているとき，$\sum b_n$ が収束すれば $\sum a_n$ も収束します．特に $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b_n}{a_n} = \rho$ が存在して $0 < \rho < \infty$ ならば $\sum a_n$ と $\sum b_n$ は同時に収束・発散します (つまり，$\sum a_n$ が収束 $\iff$ $\sum b_n$ が収束)．比較判定法を用いて収束を示す場合はうまく $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ を見つける必要があります．

正項級数の係数だけから収束するかどうか判定することができます．

定理. (ダランベールの判定法)

正項級数 $\sum a_n$ について $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = r$ が存在するとき，$\sum a_n$ は

(1) $0 \leq r < 1$ ならば収束，(2) $1 < r \leq \infty$ ならば発散する．

定理. (コーシーの判定法)

正項級数 $\sum a_n$ について $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = r$ が存在するとき，$\sum a_n$ は

(1) $0 \leq r < 1$ ならば収束，(2) $1 < r \leq \infty$ ならば発散する．

コーシーの判定法も，ダランベールの判定法も十分大きな n に対して a_n は公比 r の等比級数のようになっていることから直感的に分かります．また，$r = 1$ の場合にはコーシーの判定法でも，ダランベールの判定法でも収束・発散は分かりません．そのような場合には次のガウスの判定法を用います．

定理. (ガウスの判定法)

正項級数 $\sum a_n$ について，ある定数 k が存在して

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{k}{n} + \frac{c_n}{n \log n}, \text{ ただし } n \to \infty \text{ のとき } c_n \to 0$$

と表されるとする．このとき $\sum a_n$ は

(1) $k > 1$ ならば収束，(2) $k \leq 1$ ならば発散する．

ガウスの判定法の条件式のように表されているとき，

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty}\left(k + \frac{c_n}{\log n}\right) = k$$

となります．そこで $k = \lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$ とおいて $c_n = \left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1 - \dfrac{k}{n}\right) n \log n$ が $n \to \infty$ のとき 0 に収束するかどうかを調べ，$c_n \to 0$ となればガウスの判定法によって $\sum a_n$ の収束・発散が k の値によって分かります．

[級数]

一般の級数 $\sum a_n$ について考えてみます．まず，次の定理が成り立ちます．

定理. (ライプニッツの定理)

> 数列 $\{a_n\}$ は単調減少で $a_n \to 0$ とするとき，級数
>
> $$\sum(-1)^{n-1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n-1}a_n + \cdots$$
>
> は収束する．

級数 $\sum a_n$ で正負の項が交互に現れる級数を**交代級数**といいます．したがってライプニッツの定理より $|a_n|$ が単調減少で 0 に収束する交代級数は収束します．

定義. (絶対収束，条件収束)

> 級数 $\sum a_n$ が**絶対収束**する． $\iff$ $\sum |a_n|$ が収束する．
> 級数 $\sum a_n$ が**条件収束**する． $\iff$ $\sum |a_n|$ は発散するが，$\sum a_n$ は収束する．

このように絶対収束の「絶対」の意味は「絶対値」です．つまり「絶対収束する」とは「各項の絶対値をとった級数が収束する」を意味します．例えば $\sum(-1)^{n-1}/n^2$ は絶対収束し，$\sum(-1)^{n-1}/n$ は条件収束します．

級数が絶対収束すると，もとの級数の収束・発散が分かります．

定理. (収束)

> 絶対収束級数は収束する．

そこで，級数の収束を示すための１つの方法として絶対収束を示す事があげられます．さらに $\sum |a_n|$ は正項級数ですから前のプリントにあるように比較判定法，ダランベールの判定法，コーシーの判定法，ガウスの判定法によって収束・発散がわかります．

有限個の数の和の順序交換は交換法則によって保証されますが，級数の場合の項の並べ替えは一般にはできません．例えば

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \cdots = \log 2$$

ですが，これを「足し算２回と引き算１回」となるように入れ替えると

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n} + \cdots = \frac{3}{2}\log 2$$

となります．しかし，絶対収束している場合には級数の項の入れ替えができます．

定理. (級数の順序交換)

> 絶対収束級数は項の順序をどのように並べ替えても同じ値に収束する．

さらに絶対収束級数では２つの級数の積も計算する事ができます．

定理. (乗積級数)

> $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$，$\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ が共に絶対収束するとき，これらの乗積級数 $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)$ も絶対収束して
>
> $$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)$$
>
> となる．

[関数列]

区間 I 上で定義された関数の列 $\{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots\}$ を考えます．これのようなものを**関数列**といい $\{f_n(x)\}$ で表します．この関数列の収束，発散を考えます．

I の点 $x = x_0$ を 1 つ取って固定すると $\{f_1(x_0), f_2(x_0), \ldots, f_n(x_0), \ldots\}$ は数列です．この数列が収束 (または発散) するとき関数列 $\{f_n(x)\}$ は $x = x_0$ で**収束** (または**発散**) するといいます．さらに，任意の $x_0 \in I$ で $\{f_n(x_0)\}$ が収束するとき，$x_0 \in I$ に対して極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x_0)$ を対応させて関数

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

が得られます．このとき関数列 $\{f_n(x)\}$ は I 上で関数 $f(x)$ に**収束** (あるいは**各点収束**) するといいます．またこの関数 $f(x)$ を $\{f_n(x)\}$ の**極限関数**といいます．

定義. (各点収束)

> 区間 I 上の関数列 $\{f_n(x)\}$ が $f(x)$ に**各点収束**する
> $\iff$ 任意の $x \in I$ に対して数列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ は収束し，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

このときの $\{f_n(x)\}$ の近づき方は $x \in I$ ごとに異なることがあります．つまり各点収束は

任意の $x_0 \in I$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対してある自然数 N が (x_0 に依存して) 存在して，
任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，$n \geq N$ ならば $|f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$

と言い換えられます．

例えば $I = [0, 1]$ として，$f_n(x) = x^n$ とします．$0 \leq x_0 < 1$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_0^n = 0$ であり，$x_0 = 1$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_0^n = \lim_{n\to\infty} 1^n = 1$ ですので，このとき極限関数 $f(x)$ は $[0, 1)$ 上で 0，$f(1) = 1$ となります．さらに $0 \leq x_0 < 1$ と $\varepsilon > 0$ に対して $|f_n(x_0) - 0| = x_0^n < \varepsilon$ となる n は $n > \dfrac{\log\varepsilon}{\log x_0}$ ですから N は x_0 に応じて十分大きくとる必要があります．

この N が $x_0 \in I$ によらない定数で取れるとき，すなわち任意の $x \in I$ に対して共通の N が存在して「$n \geq N$ ならば $|f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$」とできるとき，$\{f_n(x)\}$ は I 上 $f(x)$ に**一様収束**するといいます．このとき $a_n = \displaystyle\sup_{x\in I}|f_n(x) - f(x)|$ とおくと数列 $\{a_n\}$ は $n \to \infty$ のとき 0 に収束することがわかります．

定理. (一様収束)

> 区間 I 上の関数列 $\{f_n(x)\}$ が $f(x)$ に**一様収束**する
> $\iff \displaystyle\sup_{x\in I}|f_n(x) - f(x)| \to 0 \ (n \to \infty) \iff \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{x\in I}|f_n(x) - f(x)|\right) = 0.$

同様に，区間 I 上の関数列 $\{f_n(x)\}$ に対して，$x_0 \in I$ における級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0) = f_1(x_0) + f_2(x_0) + \cdots + f_n(x_0) + \cdots$$

を考えます．これを**関数項級数**といいます．この級数の部分和列 $\{S_n(x)\}$ は

$$S_n(x_0) = f_1(x_0) + f_2(x_0) + \cdots + f_n(x_0)$$

で決まる関数 $S_n(x)$ の列で，級数 $\sum f_n(x)$ の収束，発散は部分和列 $\{S_n(x)\}$ の収束，発散で定めます．

関数列，関数項級数が収束する x の集合をその関数列，関数項級数の**収束域**といいます．

[関数項級数]

関数列，関数項級数の一様収束は極限関数がわかっているときは定義にしたがって示すことができますが，極限関数が分からないときは次のようにして判定できます．

定理. (コーシーの判定条件)

(1) 区間 I 上の関数列 $\{f_n(x)\}$ が一様収束する
$\Longleftrightarrow$ 任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $N \in \mathbb{N}$ が存在して，任意の $x \in I$, 任意の $m, n \in \mathbb{N}$ に対して，$m, n \geq N$ ならば $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ となる．

(2) 区間 I 上の関数項級数 $\sum f_n(x)$ が一様収束する
$\Longleftrightarrow$ 任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $N \in \mathbb{N}$ が存在して，任意の $x \in I$, 任意の $m, n \in \mathbb{N}$ に対して，$m \geq n \geq N$ ならば $|f_n(x) + f_{n+1}(x) + \cdots + f_m(x)| < \varepsilon$ となる．

定理. (ワイエルストラスの M-判定法)

区間 I 上の関数項級数 $\sum f_n(x)$ に対して，数列 $\{M_n\}$ で任意の $n \in \mathbb{N}$ と任意の $x \in I$ に対して

$$|f_n(x)| \leq M_n \quad \text{かつ} \quad \sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$$

をみたすものが存在するとき $\sum f_n(x)$ は I 上一様収束する．

また次も成り立ちます．

定理. (ディニの定理)

$\{f_n(x)\}$ は有界閉区間 I 上で連続な関数の列で，$f(x)$ に収束するとする．このとき
(1) $\{f_n(x)\}$ は n に関して単調増加または単調減少， (2) $f(x)$ は連続関数
ならば収束は一様である．

関数列，関数項級数が一様収束するとき次のことが成り立ちます．

(1) 連続な関数の列 $\{f_n(x)\}$ が $f(x)$ に一様収束すれば $f(x)$ も連続．
(2) 連続な関数の級数 $\sum f_n(x)$ が $f(x)$ に一様収束すれば $f(x)$ も連続．
(3) (極限と積分の交換) $I = [a, b]$ 上連続な関数列 $\{f_n(x)\}$ が I 上 $f(x)$ に一様収束するとき次が成り立つ．

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_a^b f_n(x)\,dx \right) = \int_a^b \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x) \right) dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

(4) (項別積分) $I = [a, b]$ 上連続な関数項級数 $\sum f_n(x)$ が I 上一様収束するとき次が成り立つ．

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_a^b f_n(x)\,dx \right).$$

(5) (極限と微分の交換) $\{f_n(x)\}$ は I 上 C^1 級関数の列とする．$\{f_n'(x)\}$ が I 上一様収束するとき，$\{f_n(x)\}$ がある一点 $x_0 \in I$ で収束すれば I 上全ての点で収束して極限関数 $f(x)$ も C^1 級で次が成り立つ．

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x) \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{d}{dx} f_n(x) \right).$$

(6) (項別微分) $\sum f_n(x)$ は I 上 C^1 級関数の級数とする．$\sum f_n'(x)$ が I 上一様収束するとき，$\sum f_n(x)$ がある一点 $x_0 \in I$ で収束すれば I 上全ての点で収束して極限関数 $f(x)$ も C^1 級で次が成り立つ．

$$\frac{d}{dx} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} f_n(x).$$

[整級数]

関数項級数として $\sum a_n(x-a)^n$ の形のものを考えます．これは $f_n(x)=a_n(x-a)^n$ とする関数項級数で，これを数列 $\{a_n\}$ を係数とする $x=a$ を中心とする**整級数**または**べき級数**といいます．簡単のため，平行移動して $a=0$ として

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n = a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

の収束，発散を考えます．

整級数 $\sum a_nx^n$ の収束，発散に関して次の3つの場合のみが存在します．

(1) $x=0$ 以外の全ての x に対して発散する．
(2) 全ての x の値に対して収束する．
(3) ある値 $x_0\neq 0$ に対しては収束し，別のある値 x_1 に対しては発散する．

(3) の場合 $R=\sup\{|x_0|\in\mathbb{R}\mid \sum a_nx_0^n$ は収束 $\}$ とおくと，$\sum a_nx^n$ は

(3-1) $|x|<R$ のとき絶対収束し，
(3-2) $|x|>R$ のとき発散する

ことがわかります．このような R を整級数 $\sum a_nx^n$ の**収束半径**といいます．また (1) の場合のとき $R=0$ とし，(2) の場合のとき $R=\infty$ と定めます．

整級数 $\sum a_nx^n$ の収束半径は係数列 $\{a_n\}$ から求めることができます．

定理. (整級数の収束半径)

整級数 $\sum a_nx^n$ の収束半径 R は

(1) (ダランベール) $r=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ 　または　(2) (コーシー) $r=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$

が存在するとき $R=1/r$ となる．ただし，$r=0,\ \infty$ のときはそれぞれ $R=\infty,\ 0$ とする．

正項級数のところで述べたように $r=\lim\limits_{n\to\infty}|a_{n+1}/a_n|$ または $r=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ のとき，十分大きな n に対して $a_n\sim r^n$ ですから $a_nx^n\sim(rx)^n$ となり $\sum a_nx^n\sim\sum(rx)^n$ は $|rx|<1$ のとき絶対収束，$|rx|>1$ のとき発散することが想像できるでしょう．

整級数 $\sum a_nx^n$ の収束半径 R が $0<R<\infty$ とします．このとき $|x|<R$ のとき絶対収束，$|x|>R$ のとき発散しますが，$x=\pm R$ に対しては収束，発散はそれぞれ個別に調べる必要があります．

例えば $\sum x^n$ のとき任意の $a_n=1$ ですから $r=1$ となって $R=1$ です．しかし $x=1$ のときは $\sum 1=\infty$, $x=-1$ のとき $1-1+1-1+\cdots$ ですので $x=\pm1$ のときは共に収束しません．一方 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n+1}$ に対しては $a_n=\dfrac{1}{n+1}$ ですから $r=1$ となります．このとき $x=1$ では $\sum\limits_{n=0}\dfrac{1}{n+1}=\infty$ と発散しますが，$x=-1$ のとき $\sum\limits_{n=0}\dfrac{(-1)^n}{n+1}=\log 2$ は収束します．

収束半径の端点では次が成り立ちます．

定理. (アーベルの定理)

整級数 $\sum a_nx^n$ の収束半径を $R\neq 0,\infty$ とする．もし $x=R$ でこの整級数が収束すれば $[0,R]$ 上でも一様収束し，したがって $f(x)=\sum a_nx^n$ は $(-R,R]$ 上で連続．

[整級数]

整級数の収束半径 R がわかると，収束半径内でいろんなよいことが成り立ちます．

定理. (整級数の一様収束，連続性)

整級数 $\sum a_n x^n$ の収束半径を R $(0 < R \le \infty)$ とする．この級数は

(1) $|x| < R$ なる x に対して絶対収束し，

(2) $(-R, R)$ に含まれる任意の閉区間上で一様収束する．

したがって $f(x) = \sum a_n x^n$ は $(-R, R)$ 上で連続．

さらに整級数 $\sum a_n x^n$ の収束半径 R $(0 < R \le \infty)$ 内の任意の閉区間では関数項級数と見て一様収束していますから，関数項級数と同様に順序交換に関して次が成り立ちます．

定理. (項別積分)

$f(x) = \sum a_n x^n$ の収束半径を $R > 0$ とすると $(-R, R)$ に含まれる任意の閉区間 $[a, b]$ 上で項別積分可能．つまり $-R < a \le b < R$ のとき

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b a_n x^n.$$

したがって $|x| < R$ のとき $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$.

定理. (項別微分)

$f(x) = \sum a_n x^n$ は $(-R, R)$ 上で微分可能で，項別微分可能．つまり

$$f'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

また，この整級数の収束半径も R となる．したがって $f(x)$ は $(-R, R)$ 上で何回でも項別微分可能で，そうして得られる整級数の収束半径はすべて R である．

関数 $f(x)$ が $x = a$ の近くで $f(x) = \sum a_n (x-a)^n$ (ただし $|x-a| < R$) と整級数に展開できるとき，この整級数は $|x-a| < R$ で収束していますから項別微分可能で $a_n = f^{(n)}(a)/n!$ となります．したがって $f(x)$ の $x = a$ の近くでの整級数展開は $x = a$ におけるテイラー展開と一致します．

$f(x) = \sum a_n x^n$, $g(x) = \sum b_n x^n$ を関数 $f(x)$, $g(x)$ のテイラー展開とし，収束半径はともに R 以上とします．このとき $|x| < R$ においてこれらの関数項級数は絶対収束していますから項の並べ換えができます．さらに乗積級数も $|x| < R$ で絶対収束し，$|x| < R$ において

$$f(x) \pm g(x) = \sum (a_n \pm b_n) x^n,\ f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) x^n$$

となります．

$f(x) = \sum a_n x^n$, $g(x) = \sum b_n x^n$ の収束半径は 0 でないとします．もし $g(0) = 0$ ならば合成関数 $f(g(x))$ もテイラー展開を持ち，

$$f(g(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m x^m\right)^n$$

と表されます．このように収束半径内では，関数の和・積・合成は多項式としての和・積・合成として計算することができます．