[実数の連続性と上限・下限]

例題. (上限, 下限, 最大, 最小) 集合 $E = \left\{ 1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$ の上限, 下限, 最大値, 最小値があれば求めよ.

解答例. (1) 全ての n に対して $\frac{1}{n} \leq 1$ なので $1 - \frac{1}{n} \geq 0$ です. よって $\beta = 0$ は E の1つの下界です. また $n = 1$ のとき $0 = 1 - \frac{1}{1} \in E$ なので $\beta = 0$ は E の最小値であり, E の下限でもあります.

(2) 全ての n に対して $\frac{1}{n} > 0$ なので, 全ての $x = 1 - \frac{1}{n} \in E$ に対して $x < 1$ が成り立ちます. よって $\alpha = 1$ は E の1つの上界です. 次に, 任意に $\gamma < 1$ をとります. このときアルキメデスの原理より $\frac{1}{1-\gamma} < N$ をみたす自然数 N が存在します. したがって $\gamma < 1 - \frac{1}{N}$ となり $x = 1 - \frac{1}{N} \in E$ は $\gamma < x$ をみたくします. よって $\alpha = 1$ は E の上限です. しかし $1 \notin E$ なので E は最大値を持ちません.

C1. (上限と最大値) 実数の集合 $E \neq \emptyset$ は上に有界であるとする. このとき次を示せ.

- (1) $\sup E \in E$ ならば $\sup E$ は E の最大値.
- (2) M が E の最大値ならば $\sup E = M$.

C2*. (上限, 下限) 次の実数の部分集合 E の上限, 下限, 最大値, 最小値があれば求めよ (答えだけでよい).

- (1) $\{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{2} \leq x < 10\}$. (2) $\{x \in \mathbb{Q} \mid \sqrt{2} \leq x < 10\}$. (3) $\{x \in \mathbb{Z} \mid \sqrt{2} \leq x < 10\}$.
- (4) $\left\{ 1 + (-1)^n \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$. (5) $\left\{ \frac{m}{m+n} \mid m, n \in \mathbb{N} \right\}$.

C3*. (上限, 下限) $E = \left\{ \frac{1}{2^n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$ とする. E の上限と下限を求めよ (示すこと).

C4. (有界) 次の集合は上に有界ではないことを示せ.

- (1) $\{\sqrt{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$.
- (2) $\left\{ \frac{n^2}{n+2} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$.

C5. (下限) 実数の連続性「空でない上に有界な実数の集合は上限を持つ」ことを用いて「空でない下に有界な実数の集合は下限を持つ」ことを示せ.

C6*. (命題) 次の命題が真か偽かを調べよ.

- (1) 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して, ある $E \subset \mathbb{R}$ が存在して $x \in E$ である.
- (2) ある $x \in \mathbb{R}$ が存在して, 任意の $E \subset \mathbb{R}$ に対して $x \in E$ である.
- (3) 任意の $E \subset \mathbb{R}$ に対して, ある $x \in \mathbb{R}$ が存在して $x \in E$ である.
- (4) ある $E \subset \mathbb{R}$ が存在して, 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $x \in E$ である.

[極限]

例題. (数列の極限) $a_n = \sqrt[n]{n}$ とする. 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の極限を求めよ.解答例. いま n は自然数なので $n \geq 1$ より $a_n > 0$ です. もし $a_n < 1$ とすると $0 < a_n^n < 1^n = 1$ となり $a_n^n = n \geq 1$ と矛盾します. したがって $a_n \geq 1$ であることがわかります.そこで $h_n = a_n - 1 \geq 0$ とおきます. このとき二項定理から

$$n = a_n^n = (1 + h_n)^n = 1 + nh_n + \frac{n(n-1)}{2}h_n^2 + \cdots + h_n^n \geq \frac{n(n-1)}{2}h_n^2$$

となります. したがって $n \geq 2$ のとき $h_n^2 \leq \frac{2}{n-1}$ より

$$0 \leq h_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}}$$

となります. ここで $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n-1} = 0$ であり, C7 ($\alpha = 0$ でも成立する) より $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2}{n-1}} = 0$ となります. したがってはさみうちの原理より $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0$ です. よって極限の和の公式より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + h_n) = 1 + 0 = 1$$

となります.

C7. 次の文章を読んで以下の問に答えよ.

正の実数からなる数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $\alpha > 0$ に収束していると仮定する. このとき数列 $\{\sqrt{a_n}\}_{n=1}^{\infty}$ について考える.

任意に $\varepsilon > 0$ をとる. a_n は $\alpha > 0$ に収束しているから, ある番号 N_1 が存在して $n \geq N_1$ なる全ての n に対して $|a_n - \alpha| < 3\alpha/4$ をみたす. このとき $a_n > \alpha/4$ であるから, $\alpha > 0$ より $\sqrt{a_n} > \sqrt{\alpha}/2$ である. 再び a_n は $\alpha > 0$ に収束していることから, ある番号 N_2 が存在して $n \geq N_2$ なる全ての n に対して $|a_n - \alpha| < 3\varepsilon\sqrt{\alpha}/2$ となる. そこで $N = \max\{N_1, N_2\}$ とおく. すると $n \geq N$ となる任意の n に対して, $|\sqrt{a_n} - \sqrt{\alpha}| = \frac{|a_n - \alpha|}{\sqrt{a_n} + \sqrt{\alpha}} < \frac{3\varepsilon\sqrt{\alpha}/2}{3\sqrt{\alpha}/2} = \varepsilon$ が成り立つ. よって数列 $\{\sqrt{a_n}\}_{n=1}^{\infty}$ は $\sqrt{\alpha}$ に収束する.

(1) を説明せよ. (2) を説明せよ. (3) に関して, N_1, N_2 と区別したのはなぜか.

(4) を示せ. (5) の根拠を述べよ.

C8*. (数列の極限) 一般項 a_n が次で与えられる数列の極限を求めよ. ここで a, b は定数, $[x]$ は x を超えない最大の整数を表す.

$$(1) \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n(n+1)}{n^3}. \quad (2) \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}. \quad (3) \frac{[an+b]}{n}.$$

C9*. (数列の極限) 一般項 a_n が次で与えられる数列の極限を求めよ.

$$(1) \frac{1 - 3 + 5 - 7 + \cdots + (-1)^{n+1}(2n-1)}{(-1)^{n-1}n}. \quad (2) \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \cdots + \sqrt[n]{n}}{n}.$$

C10*. (数列の差分と極限) 数列 $\{a_n\}$ について, $n \rightarrow \infty$ のとき $a_{n+1} - a_n \rightarrow \alpha$ とする. このとき $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \alpha$ を示せ.

[収束判定法]

例題. (収束判定と極限值) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は漸化式 $a_1 = 1, a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2}$ をみたすとする.

- (1) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束することを示せ.
- (2) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ.

解答例. (1) $a_1 = 1, a_2 = \sqrt{3} > 1 = a_1 > 0$ が成り立ちます. $a_n > a_{n-1} > 0$ とすると $a_{n+1}^2 - a_n^2 = a_n - a_{n-1} > 0$ であり, $a_n, a_{n+1} > 0$ なので $a_{n+1} > a_n > 0$ をみたくします. よって数学的帰納法より $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は単調増加列です. また $a_1 \leq 2$ であり, $a_n \leq 2$ とすると

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2} \leq \sqrt{4} = 2$$

となり $a_{n+1} \leq 2$ が成り立ちます. したがって全ての n について $a_n \leq 2$ であり, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は上に有界です. したがって実数の連続性より $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束します.

- (2) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束するので $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ が存在します. また極限の公式より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}^2 = \alpha^2, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + 2 = \alpha + 2$$

であり, 全ての n で $a_{n+1}^2 = a_n + 2$ が成り立つので $\alpha^2 = \alpha + 2$ となります. したがって $\alpha = -1, 2$ ですが, いま全ての n について $a_n > 0$ なので $\alpha \geq 0$ です. よって $\alpha = 2$ がわかります.

C11*. (極限) a_n が次で与えられる数列の極限を調べよ. ただし a は定数で k は自然数とする.

- (1) $\frac{a^n}{n^k}$.
- (2) $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$.
- (3) $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n}$.

C12. (基本列) 数列 $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ に対して $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ とする. 次を証明せよ.

- (1) 数列 $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束すれば $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$.
- (2) $a_k = 1/k$ のとき $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$.

C13*. (収束判定) 数列 $\{a_n\}$ を $a_1 = 2, a_{n+1} = 4 - \frac{2}{a_n}$ ($n \geq 1$) と定める. このとき次を示せ.

- (1) 全ての自然数 n に対して $2 \leq a_n < 4$ である.
- (2) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は単調増加列である.
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ.

C14*. (収束判定と極限值) 数列 $\{a_n\}$ を $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{2a_n + 1}{a_n + 1}$ と定める.

- (1) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束することを示せ.
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ.

C15. (算術幾何平均) $0 < b_1 < a_1$ とする. 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ と数列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$, $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$ で定義する. このとき次を示せ.

- (1) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は単調減少列, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は単調増加列である.
- (2) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は同じ値に収束する.

この共通の極限値を算術幾何平均という.

[関数の極限]

例題. (関数の極限) $a \geq 0$ とする. $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$ を示せ. ただし $a = 0$ のときは右極限のみ考える.

(方針) $|x - a| < \delta$ のとき $|\sqrt{x} - \sqrt{a}| = \frac{|x - a|}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \leq \frac{|x - a|}{\sqrt{a}} < \frac{\delta}{\sqrt{a}}$ ですから $\frac{\delta}{\sqrt{a}} < \varepsilon$ となるように $\delta > 0$ を小さく取ればよいことがわかります.

解答例. $a > 0$ とします. 任意に $\varepsilon > 0$ を取ります. このとき $\delta > 0$ を $\delta = \varepsilon\sqrt{a}$ と取ります. すると $0 < |x - a| < \delta$ かつ $x \geq 0$ であるものに対して $|\sqrt{x} - \sqrt{a}| = \left| \frac{x - a}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \right|$ であり $\sqrt{x} \geq 0, \sqrt{a} > 0$ なので

$$|\sqrt{x} - \sqrt{a}| = \frac{|x - a|}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \leq \frac{|x - a|}{\sqrt{a}} < \frac{\delta}{\sqrt{a}} = \varepsilon$$

となり, $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$ が成り立ちます.

$a = 0$ のときは任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta = \varepsilon^2$ と取ると $0 < x < \delta$ のとき $|\sqrt{x} - \sqrt{0}| = \sqrt{x} < \sqrt{\delta} = \varepsilon$ となります.

このように δ は ε だけでなく, 極限を考える点 a によっても変わります.

以下の問題 C16 では $\varepsilon - \delta$ は使わなくてよいです. 公式を用いて極限を計算してください.

C16*. (極限) 次の極限を調べよ. ただし a, b は定数, n は自然数とする.

$$(1) \sqrt{(x+a)(x+b)} - x \quad (x \rightarrow \infty). \quad (2) \frac{1}{x^n} \quad (x \rightarrow 0). \quad (3) \frac{\sin x}{x} \quad (x \rightarrow \infty).$$

C17*. (関数の極限) a, b を定数, n を自然数とし, 関数 $f(x), g(x)$ は $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^{n+1}} = 0, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x^{n+2}} = 0$ をみたすとする. このとき $\frac{bx^n + n^2x^{n+2} + g(x)}{ax^n + nx^{n+1} + f(x)}$ の $x \rightarrow 0$ のときの極限を調べよ.

C18. (点列極限) 関数 $f(x)$ は $a < x$ で単調増加とする. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ をみたす数列 $\{x_n\}$ に対して $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A < \infty$ ならば $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ であることを示せ.

つまり, 「任意の $K > 0$ に対してある $M \in \mathbb{N}$ が存在して $n \geq M$ ならば $x_n > K$ をみたす」数列 $\{x_n\}$ に対して, 「任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $N \in \mathbb{N}$ が存在して $n \geq N$ ならば $|f(x_n) - A| < \varepsilon$ である」が成り立っているとき, 任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $L > 0$ が存在して $x \geq L$ ならば $|f(x) - A| < \varepsilon$ となることを示す.

ヒント 1: 任意の $n \geq N$ に対して $A - \varepsilon < f(x_n)$ をみたす N が存在する.

ヒント 2: $K = a$ と取ると任意の $n \geq M$ に対して $x_n > a$ をみたすようにできる.

ヒント 3: 単調性から $x > a$ のとき $f(x) \leq A$ である.

ヒント 4: L をどのように決めればよいか?

(もちろんこれらも示すこと)

C19*. ($\varepsilon - \delta$ の順序) 関数 $f(x)$ に対して命題「 $P, 0 < |x| < \delta$ ならば $|f(x)| < \varepsilon$ 」を考える. P が次のそれぞれの場合に, 上の命題をみたす関数 $f(x)$ を以下の (A) ~ (G) から選べ.

$$(1) \forall \varepsilon > 0, \forall \delta > 0 \quad (2) \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \quad (3) \exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0 \\ (4) \exists \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \quad (5) \forall \delta > 0, \exists \varepsilon > 0 \quad (6) \exists \delta > 0, \forall \varepsilon > 0$$

$$(A) f(x) = 0. \quad (B) f(x) = x + 1. \quad (C) f(x) = \cos x. \quad (D) f(x) = \tan x.$$

$$(E) f(x) = \frac{1}{x}. \quad (F) f(x) = \frac{1}{x+1}. \quad (G) f(x) = [x^2].$$

[ロピタルの定理]

例題. (ロピタルの定理) 極限值 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x - \sin x}{x^2}$ を求めよ.

解答例. $f(x) = e^x - \cos x - \sin x$, $g(x) = x^2$ とします. 関数 x , e^x , $\cos x$, $\sin x$ は共に $\mathbb{R}$ 上 C^∞ 級ですのでそれらの差や積で表される $f(x) = e^x - \cos x - \sin x$, $g(x) = x^2$ も $\mathbb{R}$ 上で C^∞ 級です. 特に $f(x)$, $g(x)$ は $\mathbb{R}$ 上何回でも微分可能でその導関数は連続です. また $g'(x) = 2x$ は $x \neq 0$ で $g'(x) \neq 0$ です. さらに $f(0) = 0$, $g(0) = 0$ をみます.

このとき $f'(x) = e^x + \sin x - \cos x$, $g'(x) = 2x$ であり $f(x)$, $g(x)$ は C^∞ 級なので $f'(x)$, $g'(x)$ も I 上連続で微分可能です. さらに $g''(x) = 2 \neq 0$, $f'(0) = 0$, $g'(0) = 0$ であり

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \cos x + \sin x}{2} = 1$$

と極限が存在するので $f'(x)$ と $g'(x)$ に関するロピタルの定理より

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = 1$$

となります. したがって $x \rightarrow 0$ のときの $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ の極限が存在しますから再び $(f(x))$ と $g(x)$ についてのロピタルの定理より

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 1$$

となります.

C20. (平均値の定理) $a \in \mathbb{R}$ を定数とし, $f(x)$ は $\mathbb{R}$ 上微分可能とする. 全ての $x \in \mathbb{R}$ に対して $f'(x) = a$ であるとき, ある $b \in \mathbb{R}$ が存在して $f(x) = ax + b$ であることを示せ.

C21. (単調関数) 次の不等式を示せ.

- (1) $1 + x < e^x < \frac{1}{1-x}$ ($x < 1, x \neq 0$).
- (2) $\frac{x}{1+x} < \log(1+x) < x$ ($x > -1, x \neq 0$).

C22*. (変曲点) 関数 $f(x)$ は区間 $[a, b]$ で C^1 級, (a, b) で 2 回微分可能とする. ある $a < c < b$ で $\frac{f(c) - f(a)}{c - a} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ であるとき $f''(d) = 0$ をみたく d ($a < d < b$) が存在することを示せ.

C23*. (ロピタルの定理) 次の極限をロピタルの定理を用いて求めよ. もちろんロピタルの定理の条件をみたくすることを確かめること.

- (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin^{-1} x}{x^3}$.
- (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \tan^{-1} x}{x^3}$.
- (3) $\lim_{x \rightarrow +0} x \log x$.
- (4) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{1/x}$.

[テイラーの定理]

例題. (マクローリン展開) $\tan x$ を5次までマクローリン展開せよ.

解答例. $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ であり,

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5), \quad \cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4), \quad (x \rightarrow 0)$$

と表されます. また

$$\frac{1}{1+y} = 1 - y + y^2 + o(y^2), \quad (y \rightarrow 0)$$

ですので $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)$ とおくと $x \rightarrow 0$ のとき $y \rightarrow 0$ ですから

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos x} &= \frac{1}{1+y} = 1 - y + y^2 + o(y^2) = 1 - \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4\right) + \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4\right)^2 + o(x^4) \\ &= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + o(x^4), \quad (x \rightarrow 0) \end{aligned}$$

となります. よって

$$\begin{aligned} \tan x &= \sin x \frac{1}{\cos x} = \left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5)\right) \left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + o(x^4)\right) \\ &= x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5), \quad (x \rightarrow 0) \end{aligned}$$

となります.

C24*. (マクローリン展開) 次の関数をマクローリン展開せよ.

$$(1) f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}. \quad (2) f(x) = e^x \sin x \text{ (5次まで)}.$$

C25. (テイラー展開) 次の関数の与えられた点におけるテイラー展開を求めよ.

$$(1) f(x) = \sqrt{1+x^2} \text{ (} x=0 \text{)}. \quad (2) f(x) = \sin x \text{ (} x = \frac{\pi}{4} \text{)}.$$

C26*. (漸近展開) 次の極限を漸近展開を用いて求めよ.

$$\begin{aligned} (1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x) - x + \frac{1}{2}x^2}{x^3}. & \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} \right). \\ (3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 - \cos x)}{\tan x - x}. & \quad (4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - x^2 \log \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right). \end{aligned}$$

C27*. (極値) 次の関数が $x=0$ で極値を取るか調べよ.

$$(1) f(x) = x^3 \sin x + x^5 + 3. \quad (2) f(x) = x^2 \sin x - x^3 + x^5.$$

C28. (グラフの概形) 平面上の質点が2つの単振動で表される運動をしているとし, その位置ベ

クトルが $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} \cos 4t \\ \sin 3t \end{pmatrix}$, $\left(-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right)$ で与えられているとする.

- (1) 質点の速度ベクトル $\mathbf{v}$ と $\mathbf{v} = \mathbf{o}$ となる t を求めよ.
- (2) 導関数 $y' = \frac{dy}{dx}$ を求めよ.
- (3) x, y, y' の増減を調べ, 質点の運動の概形を描け.

[定積分]

例題. (積分不等式) $f(x), g(x)$ は区間 $I = [a, b]$ 上 有界かつ積分可能で, $f(x) \leq g(x)$ をみたすとする. このとき $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$ であることを示せ.

解答例. I の分割を Δ とします. Δ の1つの区間 $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ での $f(x)$ の下限を $m_k(f)$, $g(x)$ の上限を $M_k(g)$ とします. いま I_k の全ての x について $f(x) \leq g(x)$ ですから

$$m_k(f) = \inf_{x \in I_k} f(x) \leq f(x) \leq g(x) \leq \sup_{x \in I_k} g(x) = M_k(g)$$

です. これより

$$L[f, \Delta] = \sum m_k(f) \Delta x_k \leq \sum M_k(g) \Delta x_k = U[g, \Delta]$$

となります. ここで $|\Delta| \rightarrow 0$ とするとダルブーの定理より $L[f, \Delta] \rightarrow L[f]$, $U[g, \Delta] \rightarrow U[g]$ であり, $f(x), g(x)$ は積分可能なので

$$\int_a^b f(x) dx = L[f] \leq U[g] = \int_a^b g(x) dx$$

となります.

C29*. (積分可能性と定積分) $f(x) = x^2$ とし, $I = [0, 1]$ とする. I の分割 $\Delta: 0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1$ を $x_k = \frac{k}{n}$ とし, $I_k = [x_{k-1}, x_k]$, $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $|\Delta| = \max_{1 \leq k \leq n} \{\Delta x_k\}$ とおく.

- (1) $m_k(f) = \inf_{x \in I_k} f(x)$, $M_k(f) = \sup_{x \in I_k} f(x)$ を求めよ.
- (2) $L[f, \Delta] = \sum_{k=1}^n m_k(f) \Delta x_k$, $U[f, \Delta] = \sum_{k=1}^n M_k(f) \Delta x_k$ を求めよ.
- (3) $L[f] = \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} L[f, \Delta]$, $U[f] = \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} U[f, \Delta]$ を求めよ.

C30. (連続関数) 関数 $f(x)$ は閉区間 $[a, b]$ 上連続で $f(x) \geq 0$ であるとする. このとき

- (1) $\int_a^b f(x) dx \geq 0$ であり,
- (2) $\int_a^b f(x) dx = 0 \iff \forall x \in [a, b]$ について $f(x) = 0$

であることを示せ.

C31*. (不定積分の微分) $f(x)$ は $\mathbb{R}$ 上連続とする. a, c を定数として次の関数 $g(x)$ の導関数を求めよ.

- (1) $g(x) = \int_a^x f(t) dt.$
- (2) $g(x) = \int_a^{x+c} f(t) dt.$
- (3) $g(x) = \int_{x-a}^{x+a} f(t) dt.$
- (4) $g(x) = \int_a^x (x-t)f'(t) dt$ ($f(x)$ は C^1 級とする).

[線積分・面積分]

例題. (面積分) $R > 0$ とし $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$ とおく. ベクトル場 $\mathbf{E}(x, y, z) = (x, y, -z)$ に対して面積分 $\iint_S \mathbf{E}(x, y, z) \cdot \mathbf{n} dS$ を求めよ. ただし $\mathbf{n}$ は球面 S の中心から外へ向かう向きとする.

解答例. 半径 R の球面 S の法線ベクトルは (x, y, z) となるので単位法線ベクトルは $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}(x, y, z)$ です. したがって

$$\iint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_S \frac{x^2 + y^2 - z^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dS$$

であり $x = R \sin \theta \cos \varphi$, $y = R \sin \theta \sin \varphi$, $z = R \cos \theta$ と極座標に変換するとヤコビアンは $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \varphi)} = R^2 \sin \theta$ なので

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi R^3 (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta \\ &= 2\pi R^3 \int_0^\pi (1 - 2 \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta \\ &= 2\pi R^3 \left[-\cos \theta + \frac{2}{3} \cos^3 \theta \right]_0^\pi = \frac{4}{3} \pi R^3 \end{aligned}$$

となります.

また S の中身を $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$ とおくとガウスの発散定理より

$$\iint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_B \operatorname{div} \mathbf{E} dV = \iiint_B \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial(-z)}{\partial z} dV = \iiint_B 1 dV = \frac{4}{3} \pi R^3$$

となることがわかります.

C32*. (重積分) 次の重積分を計算せよ.

$$(1) \iint_{0 \leq x \pm y \leq \pi} (x - y) \sin(x + y) dx dy. \quad (2) \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} \sqrt{1 - x^2 - y^2} dx dy.$$

C33*. (重積分) 次の重積分を計算せよ.

$$(1) \iiint_{0 \leq x, y, z \leq 1} (x + y) e^{x-z} dx dy dz. \quad (2) \iiint_{x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2; z \geq 0} (x + y + z) dx dy dz.$$

C34*. (線積分) $a > 0$ とする. ベクトル場 $\mathbf{A} = (x, y)$ の双曲線 $\mathbf{r} = (\cosh t, \sinh t)$ (ただし $0 \leq t \leq a$) に沿った線積分を求めよ.

C35*. (線積分) $a, h > 0$ とする. ベクトル値関数 $\mathbf{A}(x, y, z) = (-y, x, z)$ の螺旋 $\mathbf{r}(\theta) = (a \cos \theta, a \sin \theta, h\theta)$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) に沿った線積分を求めよ.

C36. (面積分) $R > 0$ とする. ベクトル値関数 $\mathbf{E}(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$ の球面 $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$ 上の面積分を求めよ. $\mathbf{n}$ の向きは S の外側に向かう向きとする.

[全微分]

例題. (全微分) $f(x, y) = |xy|$ の $(a, b) = (0, 0)$ における全微分可能性を調べよ.

解答例. まず $f(x, y) = |xy|$ の原点での変微分係数を求めます. $h, k \neq 0$ に対して $f(h, 0) = |h0| = 0, f(0, k) = |0k| = 0$ なので

$$f_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0, \quad f_y(0, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k} = 0$$

です. そこで

$$\varepsilon = \frac{f(h, k) - f(0, 0) - f_x(0, 0)h - f_y(0, 0)k}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

とにおいて $\lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \varepsilon = 0$ となるかどうかを調べます. $\varepsilon = \frac{|hk|}{\sqrt{h^2 + k^2}}$ なので $h = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ とおくと $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ は $r \rightarrow 0$ と同値で,

$$0 \leq |\varepsilon| = \left| \frac{r^2 \cos \theta \sin \theta}{\sqrt{r^2}} \right| = r |\cos \theta \sin \theta| \leq r$$

をみだし $r \rightarrow 0$ のとき $\varepsilon \rightarrow 0$ となります. したがって

$$\lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \varepsilon = \lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{|hk|}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

となります. よって $f(x, y) = |xy|$ は原点で全微分可能です.

C37*. (全微分可能性)

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x^2+1)(y^2+1)-1}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 1, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

とする. $f(x, y)$ は $(x, y) = (0, 0)$ で全微分可能かどうか調べよ.

C38*. (全微分) 次の関数 $f(x, y)$ の原点での全微分可能性を調べよ.

(1) $f(x, y) = e^{(x+1)(y-1)}$. (2) $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$.

C39. (方向微分) $f(x, y) = \frac{x|y|}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ (ただし $f(0, 0) = 0$) とする.

(1) $f(x, y)$ の原点における $e = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq o$ 方向の微分係数を求めよ.

(2) $f(x, y)$ は $(0, 0)$ で全微分可能でないことを示せ.

C40*. (方向微分) $f(x, y) = \tan^{-1} \frac{y}{x}$ (ただし $x \neq 0$) とする. $a > 0$ とし, 曲線 C を $x^2 + y^2 = a^2$ で定まるものとする. $P = (x, y) \in C, x \neq 0$ とする.

(1) $f(x, y)$ の P における C の外側に向かう方向の微分係数を求めよ.

(2) $f(x, y)$ の P における C の接線方向で C の外側に向かって左方向の微分係数を求めよ.

C41. (全微分) $f(x, y) = \begin{cases} xy \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ とする.

(1) $f(x, y)$ は $(0, 0)$ で連続であることを示せ.

(2) $f(x, y)$ の $(0, 0)$ での偏微分係数を求めよ.

(3) $f(x, y)$ は $(0, 0)$ で全微分可能かどうか調べよ.

(4) $f(x, y)$ は C^1 級かどうか調べよ.

[多変数のテイラーの定理, 陰関数定理]

例題. (テイラー展開) $f(x, y) = \log(1 + x^2 + y^2)$ を $(0, 0)$ でテイラー展開せよ.

解答例. $g(z) = \log(1 + z)$ とし, $h(x, y) = x^2 + y^2$ とします. すると $f(x, y) = g(h(x, y))$ と表されます. いま $g(z) = \log(1 + z)$ は $|z| < 1$ でマクローリン展開可能で

$$g(z) = z - \frac{1}{2}z^2 + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} + o(z^n) \quad (z \rightarrow 0)$$

と表されました. さらに $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ のとき $z = h(x, y) \rightarrow 0$ です. したがって $x^2 + y^2$ が $(0, 0)$ に近いとき (実際には $x^2 + y^2 < 1$ のとき) $|z| < 1$ となるので $z = x^2 + y^2$ を $g(z)$ の展開式に代入して

$$\begin{aligned} \log(1 + x^2 + y^2) &= g(x^2 + y^2) \\ &= (x^2 + y^2) - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^2 + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{(x^2 + y^2)^n}{n} + o((x^2 + y^2)^n) \\ &= x^2 + y^2 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sum_{r=0}^n \frac{n!}{r!(n-r)!} x^{2(n-r)} y^{2r} + o((x^2 + y^2)^n) \end{aligned}$$

となります.

C42*. (テイラーの定理) 次の関数をマクローリン展開せよ. ただし a, b は定数とする.

(1) e^{ax+by} . (2) $e^{x^2+y^2+1}$. (3) $\sin(x - y)$.

C43. (テイラーの定理) $f(x, y) = (\log(1 + x)) \sin y$ とする.

- (1) $f(x, y)$ を $(0, 0)$ で 4 次までテイラー展開せよ.
 (2) (1) を用いて $f(x, y)$ の $(0, 0)$ における 4 階偏微分係数を求めよ.

C44*. (陰関数) 次で定まる陰関数 $y = y(x)$ について y', y'' を求めよ (x, y の式で表すこと).

(1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, (ab \neq 0)$. (2) $\log \sqrt{x^2 + y^2} = \tan^{-1} \frac{y}{x}, (x \neq 0)$.

C45*. (陰関数) $F(P, V, T)$ は C^1 級関数とし, $F(P, V, T) = 0$ をみたすとする. $\frac{\partial F}{\partial P} \neq 0$, $\frac{\partial F}{\partial V} \neq 0, \frac{\partial F}{\partial T} \neq 0$ のとき

$$\begin{aligned} P &= P(V, T) \text{ は } V, T \text{ の関数,} \\ V &= V(T, P) \text{ は } T, P \text{ の関数,} \\ T &= T(P, V) \text{ は } P, V \text{ の関数} \end{aligned}$$

とみて

$$\frac{\partial P}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial P} = -1$$

を示せ.

[極値, 条件付き極値]

例題. (条件付き極値) $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ が $x^2 + y^2 = 1$ をみたしながら動く時, $f(x, y) = x^2y$ の最大値と最小値を求めよ.

解答例. 条件 $\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ の下での $f(x, y)$ の極値を求めます. 極値の候補はラグランジュの未定乗数法により

- (1) $\text{grad } \varphi(x, y) = (0, 0)$, または
- (2) ある定数 λ が存在して $\text{grad } f(x, y) = \lambda \text{grad } \varphi(x, y)$

をみます点です. いま $\text{grad } \varphi(x, y) = (2x, 2y)$ です. $\text{grad } \varphi(x, y) = (0, 0)$ とすると $x = y = 0$ となりますが, この点は $\varphi(x, y) = 0$ をみたしません. よって $\text{grad } \varphi(x, y) = (0, 0)$ をみます点はありません.

そこである定数 λ が存在して $\text{grad } f(x, y) = \lambda \text{grad } \varphi(x, y)$ とします. ここで $\text{grad } f(x, y) = (2xy, x^2)$ ですので $\text{grad } f(x, y) = \lambda \text{grad } \varphi(x, y)$ より

$$2xy = 2\lambda x, \quad x^2 = 2\lambda y$$

をみます. 最初の式より $x(y - \lambda) = 0$ となります.

$x = 0$ のとき $2\lambda y = 0$ です. $x^2 + y^2 = 1$ より $y = \pm 1$ であり, $\lambda = 0$ となります. このとき $f(0, \pm 1) = 0$ です. $y = \lambda$ のとき $x^2 = 2\lambda^2$ であり, $x^2 + y^2 = 1$ より $x^2 + \lambda^2 = 1$ もみます. すると $3\lambda^2 = 1$ より $y = \lambda = \pm 1/\sqrt{3}$, $x = \pm\sqrt{2/3}$ となります. このとき $f\left(\pm\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}}$, $f\left(\pm\sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$ です. これらが極値の候補になります.

$E = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ は $\mathbb{R}^2$ の有界閉集合で $f(x, y)$ は E 上連続ですから最大値, 最小値を持ちます. さらにこの場合, 最大値, 最小値は極値でもありますから $f(x, y)$ は最大値 $\frac{2}{3\sqrt{3}}$, 最小値 $-\frac{2}{3\sqrt{3}}$ を持つことがわかります.

実際, $(\pm\sqrt{2/3}, 1/\sqrt{3})$ と $(0, -1)$ で極大, $(\pm\sqrt{2/3}, -1/\sqrt{3})$ と $(0, 1)$ で極小であることがわかります.

C46*. (極値) $f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 + 2xy - y^2$ とする.

- (1) a を定数として $g(x) = f(x, ax)$ とする. $g(0)$ は極値かどうか調べよ.
- (2) $f(x, y)$ の極値を求めよ.

C47*. (極値) 関数 $f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3$ の極値を調べよ.

C48*. (条件付き極値) 点 $(2, 2, 0)$ からの距離が最短であるような曲面 $z^2 = 2x^3 + 2y^3$ 上の点と, その距離を求めよ.

C49. (条件付き極値) $x^3 - 3xy + y^3 = 0$ のもとでの $x^2 + y^2$ の極値を求めよ.

[級数]

例題. (ガウスの判定法の使用例) 級数 $\sum \frac{1}{n^2}$ が収束するかどうか調べよ.

解答例. $a_n = \frac{1}{n^2}$ とします. このとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} = 1$$

ですから, ダランベールの判定法もコーシーの判定法も使えません. そこでガウスの判定法を用います.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{(n+1)^2}{n^2} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + n}{n^2} = 2$$

です. そこで $k = 2$ として $c_n = \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 - \frac{k}{n} \right) n \log n$ とおくと

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(n+1)^2}{n^2} - 1 - \frac{2}{n} \right) n \log n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} (n \log n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{n} = 0$$

ですから $k = 2 > 1$ なのでガウスの判定法より $\sum \frac{1}{n^2}$ は収束します.

C50*. (正項級数の収束判定) 次の級数が収束するかどうか判定せよ. ここで a は定数, k は自然数とする. (ヒント: ガウスの判定法は使用しない)

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}. \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^{n^2}. \quad (3) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a+n}{n} \right)^n \quad (a \in \mathbb{R}).$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}. \quad (5) \sum_{n=1}^{\infty} \sin \left(\frac{\pi}{4n^2} \right).$$

C51*. (絶対収束, 条件収束) 次の級数は絶対収束か, 条件収束か, または発散するか調べよ.

$$(1) \sum \frac{(-1)^n}{2n+1}. \quad (2) \sum (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (x \in \mathbb{R}). \quad (3) \sum (-1)^n \left(\frac{1+n}{2n} \right)^2.$$

C52. (級数の収束判定) 次の級数が正しければ証明し, 誤りならば反例を挙げよ.

- (1) $\sum a_n$ と $\sum b_n$ が絶対収束すれば $\sum (a_n + b_n)$ も絶対収束する.
- (2) $\sum a_n$ と $\sum b_n$ が収束すれば $\sum a_n b_n$ も収束する.

C53. (乗積級数) $|x| < 1$ とする.

$$(1) \text{級数 } \sum_{n=0}^{\infty} x^n \text{ は絶対収束することを示せ.}$$

$$(2) \frac{1}{1-x} \text{ をマクローリン展開せよ.}$$

$$(3) \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2} \text{ を示せ.}$$

[関数列]

例題. (一様収束) 関数列 $\left\{ \frac{x}{1+nx^2} \right\}_{n=1}^{\infty}$ が $\mathbb{R}$ 上一様収束するか調べよ.

解答例. $f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}$ とします. $x=0$ のとき $f_n(0) = 0$ です. $x \neq 0$ のとき $1+nx^2 \rightarrow \infty$ なので $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ となります. したがって極限関数は $f(x) = 0$ です. また

$f'_n(x) = \frac{1-nx^2}{(1+nx^2)^2}$ なので $|f_n(x) - f(x)|$ は $x = \pm \frac{1}{\sqrt{n}}$ で極大値 $\frac{1}{2\sqrt{n}}$ をとります. よって

$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{x}{1+nx^2} \right| = \frac{1}{2\sqrt{n}} \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty)$ となり $f_n(x)$ は $\mathbb{R}$ 上 $f(x) = 0$ に一様収束します.

C54*. (関数列の収束) 自然数 n に対して $f_n(x) = \sqrt[n]{x}$ とする.

- (1) $I = (0, 1)$ 上の関数の列 $\{f_n(x)\}$ の極限関数 $f(x)$ を求めよ.
- (2) $\{f_n(x)\}$ は $f(x)$ に一様収束するか調べよ.

C55*. (関数列の収束) 関数 $f_n(x)$ が次で与えられる関数列 $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ は $\mathbb{R}$ 上で一様収束するかどうか判定せよ.

- (1) $\frac{1}{(1+x^2)^n}$.
- (2) $\frac{x^n}{(1+x^2)^n}$.
- (3) $\frac{x^{2n}}{(1+x^2)^n}$.
- (4) $\frac{1}{n+(x-n)^2}$.

C56*. (関数項級数) 次の関数項級数が与えられた区間 I 上で一様収束するか調べよ.

- (1) $\sum x^n, I = (-1, 1)$.
- (2) $\sum x^n, I = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.
- (3) $\sum \frac{1}{x^2+n^2}, I = \mathbb{R}$.

C57. (一様収束) $[0, 1]$ 上の有界な連続関数の列 $\{f_n(x)\}$ で, 連続関数 $f(x)$ に各点収束するが一様収束しない例をあげよ.

C58. (項別微分) $p > 2$ とする. $\sum \frac{\sin nx}{n^p}$ は項別微分可能であることを示せ.

C59. (極限と微分の交換) $I = (-1, 1)$ 上の関数列 $f_n(x) = x(1-x^2)^n$ を考える.

- (1) $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ を求め, これが一様収束であることを示せ.
- (2) $f'(x)$ と $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$ を計算せよ.

[整級数]

例題. (整級数の収束半径) 整級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n}$ の収束半径を求めよ.

この整級数は

$$1 + 0x + \frac{x^2}{2} + 0x^3 + \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{x^{2n}}{2^n} + 0x^{2n+1} + \cdots$$

という級数ですので $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ は n が奇数のとき定義されません. また n が偶数のとき $\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\sqrt[n]{2^{n/2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ であり, n が奇数のとき $\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{0} = 0$ ですから数列 $\left\{ \sqrt[n]{|a_n|} \right\}_{n=0}^{\infty}$ は収束しません. したがってダランベールもコーシーもこのままでは使えません.

解答例. $x \in \mathbb{R}$ を 1 つ固定します. $a_n = \frac{x^{2n}}{2^n}$ として $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ の $n \rightarrow \infty$ とした極限を考えます.

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{2n+2}}{2^{n+1}} \frac{2^n}{|x|^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^2}{2} = \frac{|x|^2}{2}$$

となります. ここでダランベールの判定法より $r < 1$ のとき $\sum a_n$ は絶対収束, $r > 1$ のとき $\sum a_n$ は発散しますから $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n}$ は $|x|^2 < 2$ のとき絶対収束し, $|x|^2 > 2$ のとき発散します.

よって $|x| < \sqrt{2}$ のとき絶対収束し, $|x| > \sqrt{2}$ のとき発散しますので $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n}$ の収束半径は $\sqrt{2}$ です.

C60. (収束域) 次の整級数が収束する x の範囲 (収束域という) を求めよ.

$$(1) \sum \frac{x^n}{(n+1)!}. \quad (2) \sum \frac{(-2)^n}{n^2} x^n. \quad (3) \sum (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) x^n.$$

C61*. (収束半径) 次の整級数の収束半径を求めよ.

$$(1) \sum (2^n + 3^n) x^n. \quad (2) \sum \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2} x^n. \quad (3) \sum 2^n x^{3n}. \quad (4) \sum n^n x^{n^2}.$$

C62*. (整級数展開) 次の関数を $x = 0$ のまわりで整級数展開し, 収束半径を求めよ.

$$(1) \tan^{-1} x. \quad (2) \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt.$$

C63. (級数) アーベルの定理を用いて無限級数

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1} + \cdots$$

の値を求めよ.