[ベクトルと行列]

実平面 $\mathbb{R}^2$ の 2 点 $P = (a, b)$, $Q = (c, d)$ に対して, Q を始点とし P へ向かうベクトルは

$$\overrightarrow{QP} = \begin{bmatrix} a - c \\ b - d \end{bmatrix}$$

で表されます. ベクトルは「向き」と「大きさ」で決まる量ですのでこのベクトルを平行移動して始点を原点とし, 点 $(a - c, b - d)$ へ向かうベクトルと同一視できます. したがって平面上の点 $P = (a, b)$ と, 原点 O を始点とし P を終点とする平面ベクトル $\vec{p} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ が

$$P = (a, b) \longleftrightarrow \vec{p} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

として同一視できます. そこで平面ベクトル全体のなす集合を平面上の点全体のなす集合と同様に $\mathbb{R}^2$ で表します.

$$\mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

このようにベクトルは成分を縦に並べて表します.

2 つのベクトル $\vec{p} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, $\vec{q} = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ に対してベクトルの和を成分ごとの和として定めます.

$$\vec{p} + \vec{q} = \begin{bmatrix} a + c \\ b + d \end{bmatrix}$$

これは $\vec{q}$ の始点を $\vec{p}$ の終点 P まで平行移動したときの $\vec{q}$ の終点の位置に対応するベクトルとなります.

ベクトル $\vec{p} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ と実数 $c \in \mathbb{R}$ に対してベクトルの c 倍を成分ごとに

$$c\vec{p} = \begin{bmatrix} ca \\ cb \end{bmatrix}$$

と定めます. これはベクトル $\vec{p}$ の向きを変えずに大きさを c 倍することになります.

ベクトル $\vec{p} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ と $\vec{q} = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ の内積を

$$\vec{p} \cdot \vec{q} = ac + bd$$

で定めます. すると $\vec{p} \cdot \vec{p} = a^2 + b^2 \geq 0$ であり $\vec{p}$ の大きさ $|\vec{p}|$ は $\sqrt{\vec{p} \cdot \vec{p}}$ で与えられます. また $\vec{p}$ と $\vec{q}$ のなす角を θ とすると

$$\vec{p} \cdot \vec{q} = |\vec{p}| |\vec{q}| \cos \theta$$

となります. したがって $\vec{p}$ と $\vec{q}$ が直交することと $\vec{p} \cdot \vec{q} = 0$ は同値です.

以下ではベクトルは a, b のように太字英小文字で表し, 矢印は使いません. また内積は (a, b) で表し, ベクトル a の大きさを $\|a\|$ で表します.

平面ベクトルから平面ベクトルへの写像を $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ とします. したがって平面ベクトル x に対して平面ベクトル $y = f(x)$ が対応します. 別の写像 $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ に対して写像 $f + g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

と定めます. これを写像 f と写像 g の和といいます. また実数 $k \in \mathbb{R}$ に対して写像 $kf: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を

$$(kf)(x) = kf(x)$$

で定めます. これを写像 f の実数 k によるスカラー倍といいます.

平面 $\mathbb{R}^2$ から自分自身への写像 (移動または変換ともいう) で 1 次式で表されるものについて考えます. つまり点 $X = (x_1, x_2)$ から点 $Y = (y_1, y_2)$ への対応 $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ で

$$\begin{cases} y_1 = ax_1 + bx_2 + e_1 \\ y_2 = cx_1 + dx_2 + e_2 \end{cases}$$

と表されるものを考えます. ここで係数 a, b, c, d, e_1, e_2 は実数です. この対応によって原点は点 (e_1, e_2) に対応しますから, 原点から点 X へ向かうベクトル $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ は点 (e_1, e_2) から点 Y へ向かうベクトルとなります. したがってベクトルとしては $\begin{bmatrix} ax_1 + bx_2 \\ cx_1 + dx_2 \end{bmatrix}$ と同じものになります.

そこでベクトルの間の写像 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ が $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ に対して $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = f(x)$ を

$$\begin{cases} y_1 = ax_1 + bx_2 \\ y_2 = cx_1 + dx_2 \end{cases}$$

と定めることができます. この x_1, x_2 の係数をこの順で並べて写像 f を $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ で表します.

別の写像 $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ が $B = \begin{bmatrix} s & t \\ u & v \end{bmatrix}$ で表されるとします. このとき $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ に対して

$$\begin{aligned} (f + g)(x) &= f(x) + g(x) = \begin{bmatrix} ax_1 + bx_2 \\ cx_1 + dx_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} sx_1 + tx_2 \\ ux_1 + vx_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (a + s)x_1 + (b + t)x_2 \\ (c + u)x_1 + (d + v)x_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

なので写像 $f + g$ は $\begin{bmatrix} a + s & b + t \\ c + u & d + v \end{bmatrix}$ で表されます. f は A で, g は B で表されていたので A と B の和を

$$A + B = \begin{bmatrix} a + s & b + t \\ c + u & d + v \end{bmatrix}$$

と定めることができます.

実数 k に対して写像 kf は

$$(kf)(\mathbf{x}) = kf(\mathbf{x}) = k \begin{bmatrix} ax_1 + bx_2 \\ cx_1 + dx_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kax_1 + kbx_2 \\ kcx_1 + kdx_2 \end{bmatrix}$$

なので写像 kf は $\begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}$ と表されます。 f は A で表されるので A の定数 k 倍を

$$kA = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}$$

と定めることができます。

$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を 1 次式で表される平面ベクトルの写像とし f, g はそれぞれ

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} s & t \\ u & v \end{bmatrix}$$

で表されるとします。

f と g の合成写像 $g \circ f$ は

$$(g \circ f)(\mathbf{x}) = g(f(\mathbf{x}))$$

です。 $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ に対して

$$f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} ax_1 + bx_2 \\ cx_1 + dx_2 \end{bmatrix}$$

なので

$$\begin{aligned} (g \circ f)(\mathbf{x}) &= g(f(\mathbf{x})) = \begin{bmatrix} s(ax_1 + bx_2) + t(cx_1 + dx_2) \\ u(ax_1 + bx_2) + v(cx_1 + dx_2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (sa + tc)x_1 + (sb + td)x_2 \\ (ua + vc)x_1 + (ub + vd)x_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

となります。したがって $g \circ f$ は

$$\begin{bmatrix} sa + tc & sb + td \\ ua + vc & ub + vd \end{bmatrix}$$

と表されます。 g は B で、 f は A で表されたので

$$B \circ A = \begin{bmatrix} sa + tc & sb + td \\ ua + vc & ub + vd \end{bmatrix}$$

となります。ここで $B \circ A$ を単に BA で表すことにします。すると

$$BA = \begin{bmatrix} s & t \\ u & v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sa + tc & sb + td \\ ua + vc & ub + vd \end{bmatrix}$$

となります。この式で B と A の積 BA を定めることができます。

このような

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

の形のものを行列といいます。A の横の並び $[a \ b]$ を A の第 1 行、 $[c \ d]$ を A の第 2 行といいます。また A の縦の並び $\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$ を A の第 1 列、 $\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$ を A の第 2 列といいます。A の第 i 行、第 j 列にある成分を A の第 (i, j) 成分といいます。

2 つの行列 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} s & t \\ u & v \end{bmatrix}$ に対して A と B の和を

$$A + B = \begin{bmatrix} a + s & b + t \\ c + u & d + v \end{bmatrix}$$

と定めます。また実数 k に対して A の k 倍を

$$kA = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ak & bk \\ ck & dk \end{bmatrix} = Ak$$

と定めます。

B と A の積は対応する写像の合成が表す行列として

$$BA = \begin{bmatrix} sa + tc & sb + td \\ ua + vc & ub + vd \end{bmatrix}$$

と定めます。したがって BA の第 (i, j) 成分は B の第 i 行にあるベクトル (の成分を縦に並べたもの) と A の第 j 列にあるベクトルの内積で表されます。

ベクトルは列が 1 つしかない行列と見ることができます。行列 A で表される写像を f とするとき $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ に対して

$$f(x) = \begin{bmatrix} ax_1 + bx_2 \\ cx_1 + dx_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

ですので行列の積として

$$f(x) = Ax$$

と表されます。

行列 $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ を零行列といい O で表します。また行列 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ を単位行列といい E で表します。

行列 A, B, C に対して結合法則

$$(AB)C = A(BC)$$

が成立します。また分配法則

$$(A + B)C = AC + BC, \quad A(B + C) = AB + AC$$

も成立します。しかし交換法則 $AB = BA$ は一般には成立しません。さらに $A \neq O$ かつ $B \neq O$ でも $AB = O$ となることがあります。

[行列]

$\mathbb{R}^n$ を, n 個の実数を並べてできるベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ 全体のなす集合とします. $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への 1 次式で表される写像 $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})$

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{cases}$$

を考えます. この写像は $x_1, \dots, x_n$ の係数たちを並べてできる

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

によって表すことができます. このような A を m 行 n 列の行列といいます.
この A を用いて f は

$$\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}$$

となります. そこで f を対応する行列 A で置き換えて $f(\boldsymbol{x}) = A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ とみて

$$\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

と表すことができます. これによって行列 A とベクトル $\boldsymbol{x}$ の積が定義できます.

ここで A の列の数と $\boldsymbol{x}$ の行の数が一致していることに注意しましょう.

写像 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ と $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ に対応する行列をそれぞれ A, B とするとき, 写像の和

$$(f + g)(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) + g(\boldsymbol{x})$$

に対応する行列で和 $A + B$ を定義することができます. したがって A と B の和は A の行の数と B の行の数 m が, A の列の数と B の列の数 n が共に一致している必要があります.

また $h: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ に対応する行列を C とするとき, 合成写像

$$(h \circ f)(\boldsymbol{x}) = h(f(\boldsymbol{x}))$$

に対応する行列で積 CA を定義することができます. このとき C の列の数と A の行の数 m が一致している必要があります. また $g \circ f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ なので CA は ℓ 行 n 列の行列になります.

一般に mn 個の実数 (または複素数) $\{a_{ij} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ を縦に m 個、横に n 個ずつ並べて配置したもの

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

を m 行 n 列の行列, (m, n) 型の行列, あるいは $m \times n$ 行列といいます. この行数と列数の組 (m, n) を行列の型あるいはサイズといいます. $m = n$ のときは正方行列といい, 特に (n, n) 型の行列を n 次正方行列あるいは単に n 次行列といいます. $m = 1$ のとき行ベクトル, $n = 1$ のとき列ベクトルといいます. 行ベクトルと列ベクトルを合わせて数ベクトルといいます.

(m, n) 型行列 A の上から i 番目の横列を A の第 i 行, 左から j 番目の縦列を A の第 j 列といいます. A の第 i 行第 j 列にある数 a_{ij} を A の第 (i, j) 成分といいます. 第 (i, j) 成分が a_{ij} であるような行列を単に $[a_{ij}]$ のように表すことがあります. $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{ii}, \dots$ を A の対角成分といいます. 2つの行列 $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}]$ の型が等しく, 全ての i, j について $a_{ij} = b_{ij}$ であるとき A と B は等しいといい $A = B$ で表します.

2つの行列 A, B が同じ型のとき和が定義されます. A, B の型が共に (m, n) で $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}]$ であるとき

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$$

と定めます. つまり行列の和は成分ごとに和を取り, 同じ型の行列になります.

(m, n) 型の行列 $A = [a_{ij}]$ と定数 s に対して, A の s 倍を

$$sA = [sa_{ij}]$$

と定めます. 行列の定数倍も成分ごとに c 倍し, 同じ型の行列になります.

2つの行列 A, B について, A の列数と B の行数が一致するとき積 AB が定義されます. $A = [a_{ik}]$ が (ℓ, m) 型の行列, $B = [b_{kj}]$ が (m, n) 型の行列のとき, AB は (ℓ, n) 型の行列で第 (i, j) 成分 c_{ij} を

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{im}b_{mj}$$

と定めます.

$$\begin{array}{c} \text{第 } i \text{ 行} \\ \left[\begin{array}{cccc} a_{i1} & \cdots & \cdots & a_{im} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ik} & \cdots & a_{im} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{\ell 1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{\ell m} \end{array} \right] \end{array} \begin{array}{c} \text{第 } j \text{ 列} \\ \left[\begin{array}{cccc} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & a_{kj} & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{array} \right] \end{array} = [c_{ij}]$$

全ての成分が 0 であるような行列を零行列といい, O で表します. (m, n) 型の零行列であるときは $O_{m,n}$ あるいは $O_{m \times n}$ で表します. 特に全ての成分が 0 であるようなベクトルを零ベクトルといい o で表します.

全ての第 (i, i) 成分が 1 で, 他の成分が全て 0 であるような正方行列

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

を単位行列といい E で表します. 特に (n, n) 型の単位行列を E_n で表します.

[転置行列]

 $A = [a_{ij}]$ を $m \times n$ 行列とします. つまり

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

とします. A の (i, j) 成分と (j, i) 成分を入れ換えてできる $n \times m$ 行列を A の転置行列といい, tA で表します. また A の複素共役 $\bar{A}$ を成分ごとの複素共役で定めます.

$${}^tA = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{i1} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{1j} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{mj} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{in} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{bmatrix} \overline{a_{11}} & \cdots & \overline{a_{1j}} & \cdots & \overline{a_{1n}} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \overline{a_{i1}} & \cdots & \overline{a_{ij}} & \cdots & \overline{a_{in}} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \overline{a_{m1}} & \cdots & \overline{a_{mj}} & \cdots & \overline{a_{mn}} \end{bmatrix}$$

(ただし $\overline{a+bi} = a-bi, i = \sqrt{-1}$). また ${}^t\bar{A}$ を A の随伴行列といい A^* で表します. $A^* = {}^t\bar{A}$ でもあります.

命題. (転置行列の性質)

行列 A, B に対して次が成り立ちます.

- (1) ${}^t(AB) = {}^tB {}^tA$.
- (2) $(AB)^* = B^* A^*$.

定義. (対称行列, 交代行列)

A を行列とする.

- (1) A が対称行列 $\iff {}^tA = A$.
- (2) A が交代行列 $\iff {}^tA = -A$.
- (3) A がエルミート行列 $\iff A^* = A$.
- (4) A が歪エルミート行列 $\iff A^* = -A$.

正方行列 $A = [a_{ij}]$ の $i = j$ となっている成分 a_{ii} たちを行列 A の対角成分といいます. 対角成分を除く全ての成分が 0 であるような正方行列を 対角行列といいます.

定義. (対角行列)

正方行列 A が対角行列である

$\iff A$ の対角成分以外の成分は全て 0

$\iff A = \begin{bmatrix} a_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & a_n \end{bmatrix}$ の形の行列.

正方行列 $A = [a_{ij}]$ が $i > j$ のとき $a_{ij} = 0$ をみたととき A を上三角行列であるといいます. また $i < j$ のとき $a_{ij} = 0$ をみたととき A を下三角行列といいます.

$$\begin{array}{cc} \text{上三角行列} & \text{下三角行列} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ O & & a_{nn} \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} a_{11} & & O \\ \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \end{array}$$

[正則行列]

行列では四則演算のうち和・差・積が定義されていますが，商は一般にできません．ここでは行列のうち“商”ができるようなものについて考えてみましょう．このような商に相当する演算ができる行列を正則行列といいます．

定義. (正則行列)

n 次正方行列 A が正則行列である
 $\iff AX = E$ かつ $XA = E$ となる n 次正方行列 X が存在する．
 このような行列 X を A の逆行列といい， A^{-1} で表す．

普通の数 (有理数, 実数または複素数) では $a \neq 0$ のとき $ax = b$ をみたすような数 x を $\frac{b}{a}$ と表しました． n 次正方行列 A が正則行列であるとき $AX = B$ をみたす行列 X は

$$X = EX = (A^{-1}A)X = A^{-1}B$$

と表されます．ただし行列は積に関して交換可能ではありませんので $YA = B$ をみたす行列 Y は

$$Y = YE = Y(AA^{-1}) = BA^{-1}$$

となり一般に $X \neq Y$ となります．例えば $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ のとき $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ で， $AX = B$ をみたす X は $X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ であり， $YA = B$ をみたす Y は $Y = BA^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ となります．

A が正則でない場合は $AX = B$ や $XA = B$ をみたすような X は一意に存在するとは限りません．このような X が存在しないこともありますし，無数に存在する場合もあります．

次に正則行列を「写像」として見てみましょう． n 次実正方行列 A は $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^n$ への写像 $f(x) = Ax$ とみることができます．特に n 次単位行列 E_n は $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^n$ への恒等写像 $\text{id}_{\mathbb{R}^n}$ に対応します． A が正則行列であるとするとき $AX = XA = E_n$ となる X が存在しますから， X に対応する写像を g とすると

$$f \circ g = g \circ f = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$$

をみたす $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^n$ への写像になります．すると f は全射かつ単射で g が f の逆写像であることがわかります．したがって正則行列とは全単射な写像に対応し逆行列が逆写像に対応しています．

正則であることの判定や逆行列の求め方は後で扱います．逆行列については次が成り立ちます．

定理. (逆行列)

A, B を正則行列とする．

- (1) A^{-1} は正則で $(A^{-1})^{-1} = A$.
- (2) AB は正則で $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- (3) A^* は正則で $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

定義. (ユニタリ行列, 直交行列)

A を正方行列とする．

- (1) A がユニタリ行列 $\iff AA^* = E$ かつ $A^*A = E$.
- (2) A が直交行列 $\iff A = \bar{A}$ かつ A はユニタリ行列．

ユニタリ行列は正則行列であり， $A^{-1} = A^*$ となります．

[行列の区分け]

行列の表示や計算を簡素化するために行列をいくつかの小さい行列に分割して表すことがあります。これを行列の分割といいます。行列の分割は計算できることが大事ですので横に並ぶ小行列の行の数は一定であり、縦に並ぶ小行列の列の数は一定とします。

$m \times n$ 行列 A を

$$A = \begin{matrix} & \overbrace{\hspace{1.5cm}}^{b_1} & \overbrace{\hspace{1.5cm}}^{b_2} & \cdots & \overbrace{\hspace{1.5cm}}^{b_q} \\ \begin{matrix} a_1 \{ \\ a_2 \{ \\ \vdots \\ a_p \{ \end{matrix} & \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1q} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{p1} & A_{p2} & \cdots & A_{pq} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

とするとき、第 i 行に出てくる $A_{i1}, \dots, A_{iq}$ は同じ行数 a_i で、第 j 列に出てくる $A_{1j}, \dots, A_{pj}$ は同じ列数 b_j であり、それらの和は $\sum a_i = m$, $\sum b_j = n$ となります。

$m \times n$ 行列 B を行列 A と同じ様に分割したとき行列 A と行列 B の和は普通の行列の和と同様に各小行列の和となります。

$$A + B = \begin{bmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} & \cdots & A_{1q} + B_{1q} \\ A_{21} + B_{21} & A_{22} + B_{22} & \cdots & A_{2q} + B_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{p1} + B_{p1} & A_{p2} + B_{p2} & \cdots & A_{pq} + B_{pq} \end{bmatrix}$$

また $n \times \ell$ 行列 C の行を行列 A の列と同じ様に

$$C = \begin{matrix} \begin{matrix} b_1 \{ \\ b_2 \{ \\ \vdots \\ b_q \{ \end{matrix} & \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1r} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{q1} & C_{q2} & \cdots & C_{qr} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

で第 j 行の小行列の行数が A の第 j 列の列数と一致しているとき行列 A と行列 B の積が数を成分とする行列と同様に計算できます。このとき AC の (i, j) 小行列は

$$A_{i1}C_{1j} + A_{i2}C_{2j} + \cdots + A_{iq}C_{qj}$$

で与えられます。

特に n 次正方行列の分割を、任意の i について $a_i = b_i$ であるようにとるとき、これを対称分割といいます。

$$A = \begin{matrix} & \overbrace{\hspace{1.5cm}}^{a_1} & \overbrace{\hspace{1.5cm}}^{a_2} & \cdots & \overbrace{\hspace{1.5cm}}^{a_p} \\ \begin{matrix} a_1 \{ \\ a_2 \{ \\ \vdots \\ a_p \{ \end{matrix} & \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1p} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{p1} & A_{p2} & \cdots & A_{pp} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

この場合、同じ対称分割を持つ行列の和と積は普通の数を成分とする行列と同様に計算することができます。

$A = [a_{ij}]$ を $m \times n$ 行列とします. A の第 i 行を

$$\mathbf{a}^i = [a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{in}]$$

とおくと A は

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^1 \\ \mathbf{a}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}^m \end{bmatrix}$$

と分割することができます. これを A の行ベクトル分割といいます. また $n \times \ell$ 行列 $B = [b_{jk}]$ の第 k 列を

$$\mathbf{b}_k = \begin{bmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{bmatrix}$$

とおくと B は

$$B = [\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{b}_\ell]$$

と分割することができます. これを B の列ベクトル分割といいます. この分割に関して次が成り立ちます.

$$(1) [x_1 \quad \cdots \quad x_m] A = [x_1 \quad \cdots \quad x_m] \begin{bmatrix} \mathbf{a}^1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}^m \end{bmatrix} = x_1 \mathbf{a}^1 + \cdots + x_m \mathbf{a}^m$$

$$(2) B \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_\ell \end{bmatrix} = [\mathbf{b}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{b}_\ell] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_\ell \end{bmatrix} = x_1 \mathbf{b}_1 + \cdots + x_\ell \mathbf{b}_\ell$$

$$(3) AB = A[\mathbf{b}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{b}_\ell] = [A\mathbf{b}_1 \quad \cdots \quad A\mathbf{b}_\ell]$$

$$(4) AB = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}^m \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^1 B \\ \vdots \\ \mathbf{a}^m B \end{bmatrix}$$

$$(5) AB = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}^m \end{bmatrix} [\mathbf{b}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{b}_\ell] = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^1 \mathbf{b}_1 & \cdots & \mathbf{a}^1 \mathbf{b}_\ell \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{a}^m \mathbf{b}_1 & \cdots & \mathbf{a}^m \mathbf{b}_\ell \end{bmatrix}$$

第 i 成分が 1 でその他の成分が全て 0 である行ベクトルを行基本ベクトルといい, $\mathbf{e}^i$ で表します. 第 j 成分が 1 でその他の成分が全て 0 である列ベクトルを列基本ベクトルといい, $\mathbf{e}_j$ で表します.

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots$$

したがって n 次単位行列 E_n は

$$E_n = [\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{e}_n]$$

と列ベクトル分割されます.

行列にこの基本行列を掛けることを基本変形と呼びます．特に左から基本行列を掛けることを行基本変形といい，右から基本行列を掛けることを列基本変形といいます．

A を $n \times m$ 行列として， $A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}^n \end{bmatrix}$ と行ベクトル (各 $\mathbf{a}^i$ は行ベクトル) で分割します．このとき

$$P_{ij}A = \begin{matrix} i & \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{a}^j \\ \vdots \\ \mathbf{a}^i \\ \vdots \end{bmatrix} \\ j & \end{matrix}, \quad P_i(s)A = i \begin{bmatrix} \vdots \\ s\mathbf{a}^i \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad P_{ij}(s)A = \begin{matrix} i & \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{a}^i + s\mathbf{a}^j \\ \vdots \\ \mathbf{a}^j \\ \vdots \end{bmatrix} \\ j & \end{matrix}$$

となります． A に対するこの操作

- (1) ある第 i 行と別の第 j 行を入れ換える ($r_i \leftrightarrow r_j$ で表す)
- (2) ある第 i 行を定数 $s \neq 0$ 倍する (sr_i で表す)
- (3) ある第 i 行に別の第 j 行の s 倍を加える ($r_i + sr_j$ で表す)

を行基本変形といいます．この変形を矢印を用いて表します．これら 3 つの基本変形はそれぞれ

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{a}^i \\ \vdots \\ \mathbf{a}^j \\ \vdots \end{bmatrix} \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{a}^j \\ \vdots \\ \mathbf{a}^i \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{a}^i \\ \vdots \end{bmatrix} \xrightarrow{sr_i} \begin{bmatrix} \vdots \\ s\mathbf{a}^i \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{a}^i \\ \vdots \\ \mathbf{a}^j \\ \vdots \end{bmatrix} \xrightarrow{r_i + sr_j} \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{a}^i + s\mathbf{a}^j \\ \vdots \\ \mathbf{a}^j \\ \vdots \end{bmatrix}$$

となります．ただし $\vdots$ の部分は変化しません．これらのいずれか 1 つを順に操作して行列 A を変形していきます．

同様に列基本変形は

- (1) ある第 i 列と別の第 j 列を入れ換える ($c_i \leftrightarrow c_j$ で表す)
- (2) ある第 i 列を定数 $s \neq 0$ 倍する (sc_i で表す)
- (3) ある第 j 列に別の第 i 列の s 倍を加える ($c_j + sc_i$ で表す)

という操作です．

行列の積は交換可能ではないので変形の順序を入れ換えると得られる行列も変化します．したがって矢印の上下に複数の変形が記述されている場合は上から順に変形を行うこととします．特に変形が順序によらない以下の場合にはまとめて記述することができます．

- (1) いくつかの行を 0 でない定数倍する変形のみを行う場合．
- (2) 固定された 1 つの行を用いて他の行に変形 (3) のみを行う場合．

[分けられた行列の基本変形]

行列 A について, 基本変形

- (1) ある第 i 行と別の第 j 行を入れ換える
- (2) ある第 i 行を定数 $s \neq 0$ 倍する
- (3) ある第 i 行に別の第 j 行の s 倍を加える

(列についても同様) がありました. これは分割された行列に対しても同様に計算できます.

$A = [A_{ij}]$ を分割された行列とします. ここで A_{ij} は全て $m \times n$ 行列とします. このとき A の $mi + 1$ 行から $(m + 1)i$ 行を定数 $c \neq 0$ 倍すると A の第 i 行区画が c 倍されます. また $k = 1, \dots, m$ について A の $mi + k$ 行と $mj + k$ 行を入れ換えると A の第 i 行区画と第 j 行区画が入れ替わります.

$$\begin{bmatrix} * & & * \\ A_{i1} & \dots & A_{it} \\ * & & * \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} * & & * \\ sA_{i1} & \dots & sA_{it} \\ * & & * \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} * & & * \\ A_{i1} & \dots & A_{it} \\ * & & * \\ A_{j1} & \dots & A_{jt} \\ * & & * \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} * & & * \\ A_{j1} & \dots & A_{jt} \\ * & & * \\ A_{i1} & \dots & A_{it} \\ * & & * \end{bmatrix}$$

また $i \neq j$ とし, S を正則行列, X を行列として

$$P_{ij}(X) = \begin{matrix} & & i & & j & & \\ & & & & & & \\ & & \ddots & & & & O \\ i & & & E_m & & X & \\ & & & & \ddots & & \\ j & & & & & E_n & \\ & & O & & & & \ddots \end{matrix}, \quad P_i(S) = \begin{matrix} & & & & i & & \\ & & & & & & \\ & & \ddots & & & & O \\ & & & S & & & \\ & & O & & & \ddots & \end{matrix}$$

($\ddots$ には単位行列が並ぶ)

は正則行列であり, 基本行列の積で表されます. これを左から A にかけることによって

$$P_{ij}(X) \begin{bmatrix} * & & * \\ A_{i1} & \dots & A_{it} \\ * & & * \\ A_{j1} & \dots & A_{jt} \\ * & & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * & & * \\ A_{i1} + XA_{j1} & \dots & A_{it} + XA_{jt} \\ * & & * \\ A_{j1} & \dots & A_{jt} \\ * & & * \end{bmatrix},$$

$$P_i(S) \begin{bmatrix} * & & * \\ A_{i1} & \dots & A_{it} \\ * & & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * & & * \\ SA_{i1} & \dots & SA_{it} \\ * & & * \end{bmatrix}$$

とできます.

列の区画についても同様に基本変形できます. ただし, 行列の積は交換可能ではないので上のよ
うな $P_{ij}(X)$ を右から A にかけると

$$\begin{bmatrix} A_{1i} & A_{1j} \\ * & \vdots & * & \vdots & * \\ A_{si} & A_{sj} \end{bmatrix} P_{ij}(S) = \begin{bmatrix} A_{1i} & A_{1j} + A_{1i}X \\ * & \vdots & * & \vdots & * \\ A_{si} & A_{sj} + A_{si}X \end{bmatrix}$$

となります. 行基本変形と列基本変形で, 行列 X の積の順番に注意しましょう.

[階段行列]

A を $m \times n$ 行列とします. A に行基本変形を行い簡単な形に変形します. まず A を「階段行列」と呼ばれる行列に変形しましょう.

階段行列への変形は行基本変形のみを行います. 他にも逆行列の計算, 連立 1 次方程式の解法では行基本変形のみを行います.

次のような形の行列を階段行列といいます.

$$(14.1) \quad \begin{bmatrix} {}^t\mathbf{o} & 1 & A_{11} & 0 & A_{12} & 0 & * & 0 & A_{1r} \\ & & 0 & {}^t\mathbf{o} & 1 & A_{22} & 0 & * & 0 & A_{2r} \\ & & & & 0 & {}^t\mathbf{o} & 1 & * & 0 & A_{3r} \\ & & & & & & & 0 & \ddots & \vdots \\ & & & & & & & & & 1 & A_{rr} \\ O & & & & & & & & & O & O \end{bmatrix}$$

ここで A_{ij} は行ベクトルを表し, 行ベクトル ${}^t\mathbf{o}$ と A_{ij} を含む区画は 0 列以上あるとします.

$A = [a_{ij}]$ を $m \times n$ 行列とします. A の列で $\mathbf{o}$ でない最初のものが第 j 列であるとします. すると A は $A = [O \ a_j \ \dots \ a_n]$ と分割できます. ここで $a_j \neq \mathbf{o}$ なのである $a_{ij} \neq 0$ です. そこで第 i 行を $1/a_{ij}$ 倍し, 行基本変形 (3) を行い $a_{1j} = \dots = a_{i-1j} = a_{i+1j} = \dots = a_{mj} = 0$ と変形し (これを「第 j 列を (i, j) 成分を用いて掃き出す」という), 第 i 行と第 1 行を入れ換えます. こうして $A \rightarrow \begin{bmatrix} {}^t\mathbf{o} & 1 & * \\ O & \mathbf{o} & A_1 \end{bmatrix}$ の形に変形できます. A_1 に対して同様に行基本変形を行い, これを繰り返して

$$\begin{bmatrix} {}^t\mathbf{o} & 1 & A_{11} & * & A_{12} & * & * & * & A_{1r} \\ & & 0 & {}^t\mathbf{o} & 1 & A_{22} & * & * & * & A_{2r} \\ & & & & 0 & {}^t\mathbf{o} & 1 & * & * & A_{3r} \\ & & & & & & & 0 & \ddots & \vdots \\ & & & & & & & & & 1 & A_{rr} \\ O & & & & & & & & & O & O \end{bmatrix}$$

とできます. さらに各行左端の 1 になっている部分に現れる列ベクトル $\begin{bmatrix} * \\ 1 \\ \mathbf{o} \end{bmatrix}$ をこの 0 でない最下行の 1 を用いて上の * の部分を掃き出して階段行列 (14.1) に変形できます. したがって次が成り立ちます.

定理. (変形定理)

任意の行列は行基本変形で階段行列に変形できる.

ここで行基本変形は基本行列を左からかけることでした. したがってある基本行列 $P_1, \dots, P_k$ が存在して $P_k \dots P_2 P_1 A$ を階段行列にすることができます. また基本行列は正則行列ですから, その積 $P = P_k \dots P_2 P_1$ も正則行列です. よって

任意の行列 A に対して, ある正則行列 P が存在して PA を階段行列にすることができる

ことがわかります. また基本行列の逆行列もまた基本行列ですから $A \rightarrow B$ が A の階段行列 B への変形であるとき行基本変形を繰り返して B を A に変形することができます.

行列 A を階段行列 (14.1) に変形できたとき, A の階数を階段の数 r で定めます. 行列 A の階数を $\text{rank } A$ で表します.

[連立 1 次方程式]

 $x_1, \dots, x_n$ を変数とする連立 1 次方程式

$$(15.1) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

は $m \times n$ 行列 $A = [a_{ij}]$, n 次元列ベクトル $\boldsymbol{x} = [x_i]$ と m 次元列ベクトル $\boldsymbol{b} = [b_i]$ を用いて

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

と表されます。この A を連立 1 次方程式 (15.1) の係数行列といい、 A と $\boldsymbol{b}$ を並べてできる行列 $[A \mid \boldsymbol{b}]$ を (15.1) の拡大係数行列といいます。

方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ をみたすベクトル $\boldsymbol{x}$ は A が正則であれば逆行列 A^{-1} を求めて、左から A^{-1} を掛けることによって $\boldsymbol{x} = (A^{-1}A)\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$ と求めることができますが A^{-1} を求めなくても $[A \mid \boldsymbol{b}]$ に行基本変形を行って求めることができます。特に、 A^{-1} は A が正則でないと存在しません。また、 $[A \mid \boldsymbol{b}]$ に関する基本変形では A が正則でなくても $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ をみたすベクトル $\boldsymbol{x}$ を求めることができます。

拡大係数行列 $[A \mid \boldsymbol{b}]$ を行基本変形して

$$(15.2) \quad [A \mid \boldsymbol{b}] \rightarrow [B \mid \boldsymbol{d}] = \left[\begin{array}{ccccccccc|c} 1 & B_{11} & 0 & B_{12} & 0 & * & 0 & B_{1r} & d_1 \\ 0 & O & 1 & B_{22} & 0 & * & 0 & B_{2r} & d_2 \\ & & & 0 & O & 1 & * & 0 & B_{3r} & d_3 \\ & & & & & & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & & & & & & 1 & B_{rr} & d_r \\ O & & & & & & & & O & O & \boldsymbol{d}' \end{array} \right]$$

と階段行列にできたとすると、ある正則行列 (基本行列の積) P が存在して

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \iff PA\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{b} \iff B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}$$

ですから最初の連立 1 次方程式は連立 1 次方程式 $B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}$ と同値です。したがって

「 $\boldsymbol{x}$ が $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ をみたす」ことと「 $\boldsymbol{x}$ が $B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}$ をみたす」ことは同値

なので方程式 $B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}$ の解 $\boldsymbol{x}$ は方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解であることと必要十分です。

特に $\boldsymbol{d}' \neq \boldsymbol{o}$ のとき $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ は解を持たないことがわかります。 $\boldsymbol{d}' = \boldsymbol{o}$ のとき $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ は解をもちます。このとき解は $B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}$ を解いて求めることができます。

いま $d' = \mathbf{o}$ とし, 拡大係数行列 $[B \mid d]$ の基本ベクトルとなる列を $i_1 = 1 < i_2 < \cdots < i_r$

$$\text{とします. } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_{i_1} \\ \mathbf{x}_1 \\ x_{i_2} \\ \vdots \\ x_{i_r} \\ \mathbf{x}_r \end{bmatrix} \quad \text{とおくと } B\mathbf{x} = d \text{ より}$$

$$\begin{cases} x_{i_1} & = d_1 - B_{11}\mathbf{x}_1 - B_{12}\mathbf{x}_2 - \cdots - B_{1r}\mathbf{x}_r \\ x_{i_2} & = d_2 & - B_{22}\mathbf{x}_2 - \cdots - B_{2r}\mathbf{x}_r \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{i_r} & = d_r & - B_{rr}\mathbf{x}_r \end{cases}$$

となります. したがって $B = [b_{ij}]$ として

$$\begin{aligned} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_{i_1} \\ \mathbf{x}_1 \\ x_{i_2} \\ \mathbf{x}_2 \\ \vdots \\ x_{i_r} \\ \mathbf{x}_r \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} d_1 - B_{11}\mathbf{x}_1 - B_{12}\mathbf{x}_2 - \cdots - B_{1r}\mathbf{x}_r \\ \mathbf{x}_1 \\ d_2 & - B_{22}\mathbf{x}_2 - \cdots - B_{2r}\mathbf{x}_r \\ \mathbf{x}_2 \\ \vdots \\ d_r & - B_{rr}\mathbf{x}_r \\ \mathbf{x}_r \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} d_1 \\ \mathbf{o} \\ d_2 \\ \mathbf{o} \\ \vdots \\ d_r \\ \mathbf{o} \end{bmatrix} + \sum_{j \neq i_1, \dots, i_r} x_j \left(\begin{bmatrix} -b_{1j} \\ \mathbf{o} \\ -b_{2j} \\ \mathbf{o} \\ \vdots \\ -b_{rj} \\ \mathbf{o} \end{bmatrix} + \mathbf{e}_j \right), \quad (x_j \text{ は任意}) \end{aligned}$$

と表すことができます. このときの任意定数 x_j たちの数 $n - r$ を解の自由度といいます.

このように連立 1 次方程式は基本ベクトルに変形できた列に対応する変数をそれ以外の変数たちを用いて表すことができます. したがって解 $\mathbf{x}$ は

基本ベクトルに変形できない列に対応する変数たちを任意定数として

表すことができます. そこでこの x_j たちを t_j として

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t_1 \mathbf{a}_1 + \cdots + t_{n-r} \mathbf{a}_{n-r}, \quad (t_j \text{ は任意})$$

の形に表すことができます. 連立 1 次方程式の解はこのようにベクトルの形で表します.

連立1次方程式 $Ax = o$ を同次連立1次方程式あるいは単に同次方程式といいます。同次方程式は必ず $x = o$ を解に持ちます。これを $Ax = o$ の自明な解といいます。

同次連立1次方程式 $Ax = o$ が非自明な解を持つとします。解の自由度を s とするとき $t_1, \dots, t_s$ を任意定数として

$$x = t_1 a_1 + \dots + t_s a_s$$

と表されます。この解を同次方程式 $Ax = o$ の一般解といい、 $a_1, \dots, a_s$ を同次方程式 $Ax = o$ の基本解といいます。また $Ax = o$ の解全体のなす集合

$$V = \{x \mid Ax = o\} = \{c_1 a_1 + \dots + c_s a_s \mid c_1, \dots, c_s \text{ は任意}\}$$

を同次方程式 $Ax = o$ の解空間といいます。

連立1次方程式 $Ax = b$ の1つの解を $x = d$ とします。この d を方程式 $Ax = b$ の特殊解といいます。このとき $A(x - d) = o$ となり $x - d$ は同次連立1次方程式 $Ay = o$ の解です。したがって $x = d + y$ となり $Ax = b$ の解は

$$(1 \text{ つの特殊解}) + (\text{同次方程式 } Ax = o \text{ の一般解})$$

となります。

例．拡大係数行列を行基本変形して

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a & d_1 \\ 0 & 1 & b & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

となったとします。このとき連立1次方程式

$$\begin{cases} x_1 + ax_3 = d_1 \\ x_2 + bx_3 = d_2 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = d_1 - ax_3 \\ x_2 = d_2 - bx_3 \\ x_3 = x_3 \end{cases}$$

と同値であり、解は $t = x_3$ を任意定数として

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -a \\ -b \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (t \text{ は任意})$$

と表されます。

拡大係数行列が (15.2) のように変形できたとき、基本ベクトルにできた列に対応する変数は残りの変数で表すことができます。基本ベクトルになった列の個数が階数、それ以外の列に対応する変数の個数が解の自由度でしたので次が成り立ちます。

定理. (解の自由度)

A を $m \times n$ 行列、 x を n 次元ベクトル、 b を m 次元ベクトルとする。連立1次方程式 $Ax = b$ が解をもつとき

- (1) $\text{rank}[A \mid b] = \text{rank } A = n$ のときただ1つの解を持つ。
- (2) $\text{rank}[A \mid b] = \text{rank } A < n$ のとき無数の解を持ち、解の自由度は $n - \text{rank } A$ で与えられる。
- (3) $\text{rank}[A \mid b] = \text{rank } A + 1$ のとき解を持たない。

[行列方程式]

同様に行列方程式 $AX = C$ についても行列 $[A | C]$ に行基本変形を行い $AX = C$ をみたく行列 X を求めることができます. A, C を並べてできる行列 $[A | C]$ を行基本変形によって

$$[B | D] = \left[\begin{array}{cccccccc|c} O & 1 & B_{11} & 0 & B_{12} & 0 & * & 0 & B_{1r} & \mathbf{d}^{(1)} \\ & & 0 & O & 1 & B_{22} & 0 & * & 0 & B_{2r} & \mathbf{d}^{(2)} \\ & & & & 0 & O & 1 & * & 0 & B_{3r} & \mathbf{d}^{(3)} \\ & & & & & & 0 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & & & & & & 1 & B_{rr} & \mathbf{d}^{(r)} \\ O & & & & & & & & O & O & D_1 \end{array} \right]$$

($\mathbf{d}^{(i)}$ たちは行ベクトル, D_1 は行列) とできたとすると, $D_1 = O$ のとき $AX = C$ は解をもちます. このとき

$$AX = C \iff BX = D$$

なので方程式 $BX = D$ の解 X が方程式 $AX = C$ の解と一致します. X, D を

$$X = [\mathbf{x}_1 \ \dots \ \mathbf{x}_n], \quad D = [\mathbf{d}_1 \ \dots \ \mathbf{d}_n]$$

と列ベクトル分割すると

$$B\mathbf{x}_j = \mathbf{d}_j$$

をみたくしたのでこの解

$$\mathbf{x}_j = \mathbf{y}_j + \sum_{k=1}^s t_{kj} \mathbf{a}_k$$

たちを並べて

$$X = [\mathbf{x}_1 \ \dots \ \mathbf{x}_n] = [\mathbf{y}_1 \ \dots \ \mathbf{y}_n] + [\mathbf{a}_1 \ \dots \ \mathbf{a}_s][t_{kj}]$$

が解となります.

このとき行列 $Y = [\mathbf{y}_1 \ \dots \ \mathbf{y}_n]$ が方程式 $AX = C$ の1つの特殊解です. また $\mathbf{a}_i$ は $A\mathbf{a}_i = \mathbf{0}$ をみたくしたので E_{ij} を行列単位として $[\mathbf{a}_1 \ \dots \ \mathbf{a}_s]E_{ij}$ が方程式 $AX = C$ の基本解となります. 特に連立1次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解の自由度が s のとき, $AX = C$ が解をもてば解の自由度は ns になります

行列方程式 $XA = C$ については転置をとると ${}^tA{}^tX = {}^tC$ となるので $[{}^tA | {}^tC]$ を行基本変形して解 tX が求まります. この解をさらに転置をとることで $XA = C$ の解 X が求まります.

[逆行列]

A を n 次正方行列とします. A を行基本変形して単位行列 E_n に変形できたとするとある基本行列 $P_1, \dots, P_k$ が存在して

$$P_k \cdots P_1 A = E_n$$

となります. 基本行列は正則行列なので逆行列 $P_k^{-1}, \dots, P_1^{-1}$ を持ちますからこれらを左からかけて

$$A = P_1^{-1} \cdots P_k^{-1} E_n = P_1^{-1} \cdots P_k^{-1}$$

となります. このとき

$$AP_k \cdots P_1 = (P_1^{-1} \cdots P_k^{-1})(P_k \cdots P_1) = E_n$$

となるので $P = P_k \cdots P_1$ とおくと $PA = E_n$ かつ $AP = E_n$ をみたくします. したがって A は正則行列で $A^{-1} = P$ となることがわかります.

そこで A に行基本変形を行って単位行列に変形できたとき, そのときの基本行列の積が A の逆行列になります. ここで単位行列 E_n に A に行ったものと同じ行基本変形を行うと

$$P_k P_{k-1} \cdots P_2 P_1 E_n = P_k P_{k-1} \cdots P_2 P_1 = P = A^{-1}$$

となり A に行った基本変形の基本行列の積が得られ A^{-1} が求まります.

したがって分けられた行列 $[A \mid E_n]$ に行基本変形を行い, 左側の A の部分を単位行列 E_n に変形できたとすると

$$\begin{aligned} P_k P_{k-1} \cdots P_2 P_1 [A \mid E_n] &= P_k P_{k-1} \cdots P_2 [P_1 A \mid P_1] \\ &= [P_k P_{k-1} \cdots P_2 P_1 A \mid P_k P_{k-1} \cdots P_2 P_1] \\ &= [PA \mid P] = [E_n \mid A^{-1}] \end{aligned}$$

となり右側に A の逆行列 A^{-1} が現れます.

単位行列 E_n は階数 n の階段行列なので A を行基本変形で E_n に変形できないとすると A の階数は $n-1$ 以下です. A は n 次行列でしたから, このとき A を行基本変形して 0 のみからなる行ができます.

行列 $[A \mid E_n]$ を行基本変形して, 左側の行列に 0 のみからなる行ができたとします. このときある正則行列 P で $PA = \begin{bmatrix} * \\ 0 \end{bmatrix}$ となり, PA は正則行列ではありません. P は正則行列なので A も正則ではないことがわかります.

このように正方行列 A と単位行列 E_n を並べてできる行列 $[A \mid E_n]$ に行基本変形を行い $[E_n \mid X]$ とできたとき $X = A^{-1}$ となります. $[A \mid E_n]$ に行基本変形を行い, 左側の行列に 0 のみからなる行が現れたとき A は正則ではないことがわかります.

定理. (正則判定と逆行列の計算)

A を n 次正方行列, E_n を n 次の単位行列とする. $n \times 2n$ 行列 $[A | E_n]$ に行基本変形を行って

- (1) $[A | E_n] \rightarrow [E_n | X]$ とできたとしても, A は正則行列で逆行列 A^{-1} は X である.
- (2) $[A | E_n] \rightarrow [B | X]$ で B のある行が 0 のみとなった場合, A は正則ではない.

逆行列の計算では n 次行列を単位行列に変形します. このとき対角成分を 1 にする必要があります. A が整数を成分とする行列のときは 1 を作るためにある行を定数 $1/c$ 倍して行列の成分を分数にしなくても行基本変形 (2) を繰り返して 1 を作ることもできます.

整数 a, b が互いに素であるとき, ある整数 x, y で $ax + by = 1$ となるものが存在します. 一般には次が成り立ちます.

命題.

整数 a, b の最大公約数が d であるとする. このときある整数 x, y で $ax + by = d$ となるものが存在する.

行列 $A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} *$ とします. ある $a_{i1} = 1$ であれば

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \end{bmatrix} * \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_i} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ a_{11} \\ \vdots \end{bmatrix} * \xrightarrow[\substack{r_j - a'_{j1}r_1 \ (j \geq 2) \\ (a'_{i1} = a_{11}, a'_{j1} = a_{j1}, j \neq i)}]{r_j - a'_{j1}r_1 \ (j \geq 2)} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} *$$

とできます. そうではなく, a_{i1}, a_{j1} が互いに素であるときある整数 x, y で $xa_{i1} + ya_{j1} = 1$ とできます. $x = y = 0$ ではないので $y \neq 0$ とするとき ($x \neq 0$ でも同様)

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ a_{i1} \\ \vdots \\ a_{j1} \\ \vdots \end{bmatrix} * \xrightarrow{yr_j} \begin{bmatrix} \vdots \\ a_{i1} \\ \vdots \\ ya_{j1} \\ \vdots \end{bmatrix} * \xrightarrow{r_j + xr_i} \begin{bmatrix} \vdots \\ a_{i1} \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \end{bmatrix} *$$

とできます.

このように変形すると分数がなるべく出ないように計算ができます. $a_{11}, \dots, a_{n1}$ が互いに素でないときはその最大公約数 d で, ある行を $\frac{1}{d}$ 倍する必要があります.

A が n 次行列で $\text{rank } A = n$ のとき A は行基本変形で階数 n の階段行列 A' に変形できます．このとき A' は n 個の基本ベクトルを列ベクトルに持ち A' は n 列からなる行列なので $A' = \begin{bmatrix} E_n \\ O \end{bmatrix}$ の形になります．さらに A' は n 行しかないので $A' = E_n$ になります．これより次がわかります．

命題.

階数 n の n 次階段行列は単位行列に限る．

さらにこのとき基本行列の積 $P = P_k \cdots P_1$ が存在して $PA = E_n$ となりますから A は正則であることがわかります．

A, X を n 次正方形列とし, $AX = E_n$ とします．行列の変形定理より, ある正則行列 P が存在して $PA = B$ が階段行列であるようにできます．したがって

$$P = PE_n = PAX = BX$$

となります．ここで P は正則行列なので P はその行ベクトルに零ベクトルをもちません．したがって B もその行ベクトルに零ベクトルを持たないことがわかります． B は n 次階段行列ですので, 上の命題より $B = E_n$ がわかります．よって $P = X$ となり, $XA = PA = B = E_n$ をみます．したがって $AX = E_n$ かつ $XA = E_n$ となり A は正則で $X = A^{-1}$ であることがわかります．このとき $X^{-1} = A$ ですから $XA = E_n$ のとき $X = A^{-1}$ であることもわかります．これより次が成り立つことがわかります．

命題.

A を n 次正方形列とする． $AX = E_n$ または $XA = E_n$ をみたら X が存在すれば A は正則行列で $X = A^{-1}$ である．

まとめると次が成り立ちます．

命題. (正則条件)

n 次行列 A について, 次は同値．

- (1) A は正則．
- (2) A を行基本変形して単位行列 E_n に変形できる．
- (3) $\text{rank } A = n$
- (4) $XA = E_n$ または $AX = E_n$ をみたら n 次行列 X が存在する．

(4) の n 次行列 X が A の逆行列になります．また $A = P_1^{-1} \cdots P_k^{-1}$ であり, $P_1, \dots, P_k$ は基本行列なので $P_1^{-1}, \dots, P_k^{-1}$ も基本行列です．これより次がわかります．

命題.

正則行列は基本行列の積で表される．

階数に関して次が成り立ちます．

命題. (階数の基本的性質)

A を $m \times n$ 行列, B を $n \times \ell$ 行列とする．このとき次が成立する．

- (1) $0 \leq \text{rank } A \leq \min\{m, n\}$ であって, $\text{rank } A = 0 \iff A = O$.
- (2) $\text{rank}({}^t A) = \text{rank } A, \text{rank}(\bar{A}) = \text{rank } A$.
- (3) P, Q が正則行列ならば $\text{rank}(PA) = \text{rank}(AQ) = \text{rank}(PAQ) = \text{rank } A$.
- (4) $\text{rank}(AB) \leq \min\{\text{rank } A, \text{rank } B\}$.

[行列式]

n 個の要素からなる集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ の順列の全体を S_n で表すことにします。したがって S_n の要素 $p \in S_n$ は $p_i \in \{1, \dots, n\}$ で $i \neq j$ のとき $p_i \neq p_j$ となるもので

$$p = [p_1 \ p_2 \ \cdots \ p_i \ \cdots \ p_n]$$

と表されます。

$p \in S_n$ に対して「 $i < j$ かつ $p_i > p_j$ 」であるとき p_i と p_j は転倒しているといい、組 (p_i, p_j) を転倒対といい、転倒対 (p_i, p_j) の個数を $t(p)$ で表すことにします。

$$p = [p_1 \ p_2 \ \cdots \ p_i \ \cdots \ p_n]$$

のとき、転倒の個数 $t(p)$ は

$$t(p) = \sum_{i=1}^n (p_i \text{ の右側で } p_i \text{ よりも小さいものの個数})$$

となります。また $p \in S_n$ に対して p の符号 $\text{sgn}(p)$ を $\text{sgn}(p) = (-1)^{t(p)}$ と定めます。

n 次正方行列 $A = [a_{ij}]$ に対して A の行列式 $|A|$ または $\det A$ を

$$|A| = \sum_{p \in S_n} \text{sgn}(p) a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

と定めます。ここでの和は全ての $p \in S_n$ に対して取ります。したがって $n!$ 個の S_n の元 p に対しての和となります。

$n = 2$ のとき $\{1, 2\}$ の順列は $p_1 = [1 \ 2]$ と $p_2 = [2 \ 1]$ の 2 つあります。このとき転倒の個数はそれぞれ 0, 1 であり、符号は $\text{sgn}(p_1) = 1$, $\text{sgn}(p_2) = -1$ となります。これより

$$|A| = \text{sgn}(p_1) a_{11} a_{12} + \text{sgn}(p_2) a_{12} a_{21} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

です。

同様に $n = 3$ のときは

$$S_3 = \{(1 \ 2 \ 3), (2 \ 3 \ 1), (3 \ 1 \ 2), (1 \ 3 \ 2), (2 \ 1 \ 3), (3 \ 2 \ 1)\}$$

であり、最初の 3 つが符号 1, 最後の 3 つが符号 -1 です。よって

$$|A| = a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{13} a_{22} a_{31}$$

となります。

このように $n = 2, 3$ では行列式は成分を「右斜下に掛け合わせたもの」を加え、「左斜下に掛け合わせたもの」を引くことによって求められます (サラスの方法)。ただし、この計算法は n が 4 以上では成り立ちません。また、行列式をこの定義に従って計算するのは大変なので普通は基本変形などで簡単な行列の行列式に変形して計算します。

[行列式と基本変形]

行列式の計算は、実際には基本変形などによって簡単な (0 の多い) 行列に変形して計算します。最初に特殊な形のものについて次が成り立ちます。

(I) ある行または列が 0 のみ。このとき、行列式は 0 となります。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

(II) 第 1 行または第 1 列が (1, 1) 成分を除いて 0 のみ。このとき、行列式はサイズを下げることができます。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

また基本変形によって行列式は次のように変化します。ここでは真行数の都合で列で書いていますが、行でも同じです。

(1) 行または列を入れ換えると符号が変わる。

$$\begin{vmatrix} \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1i} & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{ni} & \cdots \end{vmatrix}.$$

(2) 1 つの行または列を c 倍すると、行列式も c 倍される。つまり、1 つの行または列の共通因数をくくり出すことができる。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & ca_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & ca_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

(3) ある行に別の行の c 倍を加えても行列式は変わらない。列に関しても同様。

$$\begin{vmatrix} \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} + ca_{1i} & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} + ca_{ni} & \cdots \end{vmatrix}.$$

これから、もし第 i 行と第 j 行が全く同じならば第 j 行から第 i 行を引く事によって第 j 行が 0 のみとなります。したがって行列式は 0 となります。

このように基本変形によって (I) または (II) の形に変形し、次数を下げて行列式を求める事ができます。

[行列式の性質]

行列式に関して、次のような性質があります。

- (1) 行列の転置を取っても行列式は変わりません。 $|{}^tA| = |A|$.
- (2) 複素共役を取ると行列式も複素共役になります。 $|\overline{A}| = \overline{|A|}$.
- (3) 行列の積に関して、行列式も積になります。 $|AB| = |A| \cdot |B|$.
- (4) 行列の和に関して、行列式は和になるとは限りません。 $|A+B| \neq |A| + |B|$. ただし、ある1つの行(または列)に関してのみの場合はそれぞれの和となります。
 $|a_1 \cdots a_{i-1} \ a_i + a'_i \ a_{i+1} \cdots a_n| = |a_1 \cdots a_i \cdots a_n| + |a_1 \cdots a'_i \cdots a_n|$
 ここで a_j などは列ベクトルです。

- (5) 行列 X を分割して $X = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ とします。このようにおいても一般に

$$|X| \neq |AD - CB|, \quad |X| \neq |A||D| - |B||C|$$

です。

分割された行列に関しても基本変形ができ、行列式についても同様となります。ここでは A, B, C, D は全て n 次行列とし、 c は定数とします。

- (1) $\begin{vmatrix} A & B \\ O & D \end{vmatrix} = |A| \cdot |D|$ が成り立ちます。これから

$$\begin{vmatrix} A & O \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} {}^tA & {}^tC \\ O & {}^tD \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} {}^tA & {}^tC \\ O & {}^tD \end{vmatrix} = |{}^tA| \cdot |{}^tD| = |A| \cdot |D|$$

が分かります。

- (2) $1 \leq i \leq n$ の全てについて $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}$ の第 i 行と第 $n+i$ 行を入れ換えると、行の入れ換え1回ごとに -1 倍されますから $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = (-1)^n \begin{vmatrix} C & D \\ A & B \end{vmatrix}$ となります。

- (3) $1 \leq i \leq n$ の全てについて $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}$ の第 i 行を c 倍すると、行の c 倍1回ごとに行列式も c 倍されますから $\begin{vmatrix} cA & cB \\ C & D \end{vmatrix} = c^n \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}$ となります。

- (4) $1 \leq i \leq n$ の全てについて $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}$ の第 i 行の c 倍を第 $n+i$ 行に加えるとこれらの操作では行列式は変化しませんので $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ C + cA & D + cB \end{vmatrix}$ となります。

- (5) X を n 次行列とします。このとき (1) より $\begin{vmatrix} E_n & X \\ O & E_n \end{vmatrix} = 1$ です。よって

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E_n & X \\ O & E_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A + XC & B + XD \\ C & D \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} \begin{vmatrix} E_n & X \\ O & E_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & AX + B \\ C & CX + D \end{vmatrix}$$

となります。分割された行列の「行」の変形と「列」の変形では X のかけられる方向が変わることに注意しましょう。

[正則行列と行列式]

n 次正方行列 A が正則とすると A の逆行列 A^{-1} が存在して $AA^{-1} = E$ をみます。この行列式を考えると

$$|AA^{-1}| = |A||A^{-1}| = |E| = 1$$

ですから $|A| \neq 0$ です。また A が正則行列でないとき $\text{rank } A < n$ ですからある正則行列 P が存在して $0 = |PA| = |P||A|$ となります。 P は正則ですから $|P| \neq 0$ なので $|A| = 0$ となります。したがって

$$A \text{ が正則} \iff |A| \neq 0$$

がわかります。これまでの結果をまとめて、次がわかります。

定理. (正則判定)

n 次行列 A について次は同値。

- (1) A は正則行列。
- (2) $AX = E_n$ かつ $XA = E_n$ をみたす行列 X が存在する。
- (3) $AX = E_n$ または $XA = E_n$ をみたす行列 X が存在する。
- (4) A を基本変形によって E_n にできる。
- (5) A を行基本変形のみによって E_n にできる。
- (6) A を列基本変形のみによって E_n にできる。
- (7) $\text{rank } A = n$.
- (8) 連立 1 次方程式 $Ax = o$ は自明な解しか持たない。
- (9) 連立 1 次方程式 $Ax = c$ はただ 1 つの解を持つ。
- (10) $|A| \neq 0$.

n 次正方行列 $A = [a_{ij}]$ に対して対角成分の和を A のトレースといい $\text{tr } A$ と表します。

$$\text{tr } A = \sum_{i=1}^n a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}.$$

$A = [a_{ij}], B = [b_{ij}]$ を n 次正方行列とします。このとき AB の (i, i) 成分は $\sum_{j=1}^n a_{ij}b_{ji}$ なので

$$\text{tr}(AB) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{ji} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n b_{ji}a_{ij} = \text{tr}(BA)$$

となります。

一般にトレースについて次が成り立ちます。

命題. (トレースの性質)

A, B, C は n 次正方行列, P は n 次正則行列, c は定数とする。このとき次が成立する。

- (1) $\text{tr}(A + B) = \text{tr } A + \text{tr } B$.
- (2) $\text{tr}(cA) = c \text{tr } A$.
- (3) $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.
- (4) $\text{tr}(ABC) = \text{tr}(BCA)$.
- (5) $\text{tr}(P^{-1}AP) = \text{tr}(A)$.

[行列式の余因子展開]

次数低下は第 1 行または第 1 列が (1, 1) 成分を除いて 0 のとき行列のサイズを下げる事ができました。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

一般に、第 i 行または第 j 列が 1 つの成分を除いて 0 であるとき行列のサイズを低下させることができます。

$$\begin{vmatrix} A_{11} & \mathbf{o} & A_{12} \\ * & a_{ij} & * \\ A_{21} & \mathbf{o} & A_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{11} & * & A_{12} \\ \mathbf{o} & a_{ij} & \mathbf{o} \\ A_{21} & * & A_{22} \end{vmatrix} = (-1)^{i+j} a_{ij} \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{22} & A_{22} \end{vmatrix}$$

となります。

$A = [a_{ij}]$ を n 次の正方行列とします。 A の成分 a_{ij} の余因子 $\widetilde{a}_{ij}$ を A の第 i 行と第 j 列を取り除いてできる $n - 1$ 次行列の行列式の $(-1)^{i+j}$ 倍と定めます。

定義. (余因子)

n 次行列 $A = [a_{ij}]$ の第 (i, j) 余因子 $\widetilde{a}_{ij}$ は次で与えられる。

$$\widetilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\ j-1} & a_{1\ j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1\ 1} & \cdots & a_{i-1\ j-1} & a_{i-1\ j+1} & \cdots & a_{i-1\ n} \\ a_{i+1\ 1} & \cdots & a_{i+1\ j-1} & a_{i+1\ j+1} & \cdots & a_{i+1\ n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\ j-1} & a_{n\ j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

余因子を用いると次数低下公式は

$$A = [a_{ij}] \text{ の第 } i \text{ 行が } a_{ij} \text{ を除いて } 0 \text{ のとき } |A| = a_{ij} \widetilde{a}_{ij}$$

$$A = [a_{ij}] \text{ の第 } j \text{ 列が } a_{ij} \text{ を除いて } 0 \text{ のとき } |A| = a_{ij} \widetilde{a}_{ij}$$

となります。

行列式は1つの行について、和を分解することができます。つまり

$$\begin{vmatrix} A_1 \\ \mathbf{a} + \mathbf{b} \\ A_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 \\ \mathbf{a} \\ A_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_1 \\ \mathbf{b} \\ A_2 \end{vmatrix}$$

となります。そこで $A = [a_{ij}]$ の第 i 行を

$$\mathbf{a}^i = a_{i1} \mathbf{e}_1 + \cdots + a_{in} \mathbf{e}_n$$

と分解すると、次数低下公式より

$$|A| = a_{i1} \widetilde{a}_{i1} + \cdots + a_{in} \widetilde{a}_{in}$$

となります。列についても同様ですので次のように行列式が次数の小さな行列式の和で表されます。

定理. (余因子展開)

$A = [a_{ij}]$ の (i, j) 余因子を $\widetilde{a}_{ij}$ とする。このとき任意の (i, j) について

$$|A| = \sum_{k=1}^n a_{ik} \widetilde{a}_{ik} = \sum_{k=1}^n a_{kj} \widetilde{a}_{kj}$$

が成り立つ。

この最初の式 $|A| = \sum_{k=1}^n a_{ik} \widetilde{a}_{ik}$ を第 i 行に関する余因子展開いい、式 $|A| = \sum_{k=1}^n a_{kj} \widetilde{a}_{kj}$ を第 j 列に関する余因子展開といいます。特に第1行と第1列の余因子展開はそれぞれ

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11} \widetilde{a}_{11} + a_{12} \widetilde{a}_{12} + \cdots + a_{1n} \widetilde{a}_{1n} && \text{(第1行に関する余因子展開)} \\ &= a_{11} \widetilde{a}_{11} + a_{21} \widetilde{a}_{21} + \cdots + a_{n1} \widetilde{a}_{n1} && \text{(第1列に関する余因子展開)} \end{aligned}$$

です。

n 次行列 A に対して、第 (i, j) 成分を A の第 (j, i) 余因子とする行列を A の余因子行列といいます。

定義. (余因子行列)

正方行列 A の余因子行列 $\widetilde{A}$ を

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} \widetilde{a}_{11} & \cdots & \widetilde{a}_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ \widetilde{a}_{1n} & \cdots & \widetilde{a}_{nn} \end{bmatrix}$$

と定める (添字に注意)。

一般に $A\widetilde{A} = \widetilde{A}A = |A|E_n$ となります。したがって $|A| \neq 0$ のとき A の逆行列は余因子行列を用いて

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \widetilde{A}$$

で与えられます。

[クラメルの公式]

 n 個の変数と n 個の式を持つ連立 1 次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

は n 次正方行列 $A = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n]$, $\left(a_i = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{bmatrix} \right)$ とベクトル $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

を用いて $Ax = b$ と表されました. A が正則のときこの連立 1 次方程式の解は次のように表されます.

定理. (クラメルの公式)

$A = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n]$ を n 次正則行列とする. このとき連立 1 次方程式 $Ax = b$ の解は

$$x_i = \frac{|a_1 \ \dots \ a_{i-1} \ b \ a_{i+1} \ \dots \ a_n|}{|a_1 \ \dots \ a_{i-1} \ a_i \ a_{i+1} \ \dots \ a_n|}$$

と表される.

 n 個の変数と m 個の式を持つ連立 1 次方程式 (ただし $\text{rank}[a_{ij}] = m$)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

の場合は x_i のうちの $n - m$ 個を右辺に移項して

$$\begin{cases} a_{1i_1}x_{i_1} + a_{1i_2}x_{i_2} + \cdots + a_{1i_m}x_{i_m} = b_1 + a_{1i_{m+1}}x_{i_{m+1}} + \cdots + a_{1i_n}x_{i_n} \\ a_{2i_1}x_{i_1} + a_{2i_2}x_{i_2} + \cdots + a_{2i_m}x_{i_m} = b_2 + a_{2i_{m+1}}x_{i_{m+1}} + \cdots + a_{2i_n}x_{i_n} \\ \vdots \\ a_{mi_1}x_{i_1} + a_{mi_2}x_{i_2} + \cdots + a_{mi_m}x_{i_m} = b_m + a_{mi_{m+1}}x_{i_{m+1}} + \cdots + a_{mi_n}x_{i_n} \end{cases}$$

(ただし $\det[a_{ji_j}] \neq 0$)

と変形してクラメルの公式を用いることができます.

クラメルの公式ではたくさんの行列式を計算する必要があるので, 手計算では掃き出し法を用いる方が簡単です.

[行列式と図形]

行列式と図形

x, y を 2 次元ベクトルとします。また x, y を並べてできる行列を $A = [x \ y]$ とします。このとき平面内で x, y を 2 辺とする平行四辺形の面積 S は $S = |\det A|$ で表されます。特に x から y へ向かう平行四辺形の内角の向きが正のとき $\det A > 0$ であり、 x から y へ向かう内角の向きが負のとき $\det A < 0$ となります。これより x, y を 2 辺とする平行四辺形の面積は向きを込めて $\det A$ で表されます。

x, y, z を 3 次元ベクトルとします。また x, y, z を並べてできる行列を $A = [x \ y \ z]$ とします。3 次元ベクトル

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

に対して内積 $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ と外積 $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ を

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3, \quad \mathbf{x} \times \mathbf{y} = \begin{bmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{bmatrix}$$

と定めます。このとき

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}, \mathbf{x} \times \mathbf{y}) &= x_1(x_2y_3 - x_3y_2) + x_2(x_3y_1 - x_1y_3) + x_3(x_1y_2 - x_2y_1) \\ &= x_1 \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} - x_2 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_1 & y_1 \\ x_2 & x_2 & y_2 \\ x_3 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = 0 \end{aligned}$$

であり、同様にして $(\mathbf{y}, \mathbf{x} \times \mathbf{y}) = 0$ となります。したがって $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ は $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ の両方に直交するベクトルです。また行列式 $|\mathbf{x} \ \mathbf{y} \ \mathbf{z}|$ は内積と外積を用いて

$$|\mathbf{x} \ \mathbf{y} \ \mathbf{z}| = (\mathbf{x}, \mathbf{y} \times \mathbf{z})$$

と表されます。

このとき空間内で $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ を 3 辺とする平行六面体の体積は (向きを込めて) $\det A$ で表されます。このとき順序付けられた組 $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ が右手系のとき $\det A > 0$, 左手系のとき $\det A < 0$ となります。

平面上の 2 点 $A = (a_1, a_2), B = (b_1, b_2)$ に対して A, B を通る直線の方程式は $(a_2 - b_2)(x - b_1) - (a_1 - b_1)(y - b_2) = 0$ なので余因子展開の公式より

$$\begin{aligned} &(a_2 - b_2)(x - b_1) - (a_1 - b_1)(y - b_2) \\ &= (a_2 - b_2)x - (a_1 - b_1)y + (a_1b_2 - a_2b_1) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & x \\ a_2 & b_2 & y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

より A, B を通る直線の方程式は

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & x \\ a_2 & b_2 & y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

で与えられます。

[ベクトルと行列]

ベクトル .

$V = \mathbb{R}^n$ とし, $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r \in V$ とします . 条件

$c_1, \dots, c_r \in \mathbb{R}$ に対して「 $c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \dots + c_r\mathbf{a}_r = \mathbf{o}$ ならば $c_1 = c_2 = \dots = c_r = 0$ 」

が成り立つとき $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r$ は1次独立であるといいます . したがって $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r$ を並べてできる $n \times r$ 行列を $A = [\mathbf{a}_1 \ \dots \ \mathbf{a}_r]$ とするとき

$\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r$ は 1 次独立

$\iff$ 方程式 $Ax = \mathbf{o}$ は自明な解しか持たない

$\iff \text{rank } A = r$

であることがわかります .

$\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \in V$ が 1 次独立で, 任意の $\mathbf{c} \in V$ に対してある $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ が存在して

$$\mathbf{c} = c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \dots + c_n\mathbf{a}_n$$

と表されるとき $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ は V の基底であるといいます . したがって $A = [\mathbf{a}_1 \ \dots \ \mathbf{a}_n]$ とするとき

$\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ が V の基底

$\iff \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ は 1 次独立で任意の $\mathbf{c} \in V$ に対して $Ax = \mathbf{c}$ は解を持つ

$\iff \text{rank } A = n$

となります .

特に単位ベクトル $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \in \mathbb{R}^n$ は $\mathbb{R}^n$ の基底をなします . これを $\mathbb{R}^n$ の標準基底といいます .

$V = \mathbb{R}^n$ の (標準基底とは限らない) 基底を $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ とします . このとき任意の $\mathbf{x} \in V$ は $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ として

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \dots + x_n\mathbf{a}_n = [\mathbf{a}_1 \ \dots \ \mathbf{a}_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

と一意的に表されます . このときの列ベクトル $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ を (順序付けられた) 基底 $[\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n]$ に

関する $\mathbf{x}$ の座標といいます .

線形写像 .

$V = \mathbb{R}^n, W = \mathbb{R}^m$ とします . 写像 $f: V \rightarrow W$ が条件

- (1) 任意の $x, y \in V$ に対して $f(x + y) = f(x) + f(y)$
- (2) 任意の $x \in V$ と任意の $c \in \mathbb{R}$ に対して $f(cx) = cf(x)$

をみたすとき線形写像であるといいます .

$f: V \rightarrow W$ を線形写像とし, W の (標準基底とは限らない) 基底を $b_1, \dots, b_m$ とします . $x \in V$ が基底 $(a_1, \dots, a_n)$ に関して

$$x = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n = [a_1 \ \dots \ a_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

と表されるとき $f(x) \in W$ が基底 $(b_1, \dots, b_m)$ で

$$f(x) = y_1 b_1 + y_2 b_2 + \dots + y_m b_m = [b_1 \ \dots \ b_m] \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

と表されるとします . このときある $m \times n$ 行列 A で

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

と表すことができます . この行列 A を線形写像 f の V の基底 $(a_1, \dots, a_n)$ と W の基底 $(b_1, \dots, b_m)$ に関する表現行列といいます .

関数行列式 .

$x = f(s, t), y = g(s, t)$ を s, t の C^1 級関数とします . s, t のそれぞれの増分 $\Delta s, \Delta t$ に対して x, y のそれぞれの増分 $\Delta x, \Delta y$ は

$$\begin{aligned} \Delta x &= f(s + \Delta s, t + \Delta t) - f(s, t) = f(s + \Delta s, t + \Delta t) - f(s, t + \Delta t) + f(s, t + \Delta t) - f(s, t) \\ &= \frac{\partial f}{\partial s}(s, t + \Delta t) \Delta s + \frac{\partial f}{\partial t}(s, t) \Delta t + \varepsilon_1 = \frac{\partial f}{\partial s}(s, t) \Delta s + \frac{\partial f}{\partial t}(s, t) \Delta t + \varepsilon'_1 \\ \Delta y &= \frac{\partial g}{\partial s}(s, t) \Delta s + \frac{\partial g}{\partial t}(s, t) \Delta t + \varepsilon'_2 \end{aligned}$$

(ε は $\Delta s, \Delta t$ について 2 次以上の項) と表すことができます . これより 1 次近似として

$$\begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta s \\ \Delta t \end{bmatrix}$$

となります . この行列の行列式 $\frac{\partial(x, y)}{\partial(s, t)} = \det \begin{bmatrix} \partial x / \partial s & \partial x / \partial t \\ \partial y / \partial s & \partial y / \partial t \end{bmatrix}$ を変数変換のヤコビアンといいます . ヤコビアンは変数変換での面積の (向きも込めた) 拡大率を表します .