[ベクトルと行列]

例題. (ベクトルの変換) $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ $(0 \leq \theta < 2\pi)$ とし，$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ とする．$A\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{x}$ のなす角を求めよ．

解答例. $A\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{x}$ のなす角を φ とすると余弦定理より $(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \|A\boldsymbol{x}\|\,\|\boldsymbol{x}\|\cos\varphi$ が成り立ちます．ここで

$$A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{bmatrix}$$

なので

$$\begin{aligned}
(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) &= x(x\cos\theta - y\sin\theta) + y(x\sin\theta + y\cos\theta) = (x^2+y^2)\cos\theta \\
\|A\boldsymbol{x}\|^2 &= (A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x}) = (x\cos\theta - y\sin\theta)^2 + (x\sin\theta + y\cos\theta)^2 \\
&= x^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + y^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = x^2 + y^2 \\
\|\boldsymbol{x}\|^2 &= (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = x^2 + y^2
\end{aligned}$$

より

$$\cos\varphi = \frac{(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}{\|A\boldsymbol{x}\|\,\|\boldsymbol{x}\|} = \frac{(x^2+y^2)\cos\theta}{x^2+y^2} = \cos\theta$$

となります．いま $0 \leq \varphi \leq \pi$ なので $0 \leq \theta \leq \pi$ のとき $\varphi = \theta$ となります．また $\pi \leq \theta < 2\pi$ のとき

$$\cos\varphi = \cos\theta = \cos(2\pi - \theta)$$

であり，$0 < 2\pi - \theta \leq \pi$ をみたすので $\varphi = 2\pi - \theta$ となります．

とくに行列 A はベクトル $\boldsymbol{x}$ を角度 θ だけ正の向きに回転させる変換を表す行列であることが分かります．

L1*. (分配法則) $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} s & t \\ u & v \end{bmatrix}$ を行列，$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix}$ とする．

$$(1)\ A(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{z}) = A\boldsymbol{x} + A\boldsymbol{z}, \quad (2)\ (A+B)\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{x}$$

を示せ．

L2*. (行列とベクトルの積) 次を計算せよ．

(1) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$

L3*. (行列の積) $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ とする．次を計算せよ．

(1) AB (2) BA

L4*. (行列式) $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ に対して $\det A = ad - bc$ とおく．$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$ を 2 辺とするような平行四辺形の面積は $|\det A|$ であることを示せ．

L5. (ベクトルと行列式) $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ とし，$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$ とおく．$\det A = 0$ のとき，ある定数 x, y (ただし $(x, y) \neq (0, 0)$) が存在して $x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ となることを示せ．

[ベクトルと行列]

例題. (行列の積) $A(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ とする.

$$A(\theta)A(\varphi) = A(\theta+\varphi)$$

を示せ.

解答例. 定義に従って行列の積を計算します.

$$A(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \quad A(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

より，加法定理を用いて

$$\begin{aligned} A(\theta)A(\varphi) &= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi & -\cos\theta\sin\varphi - \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta\sin\varphi + \cos\theta\cos\varphi \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\theta+\varphi) & -\sin(\theta+\varphi) \\ \sin(\theta+\varphi) & \cos(\theta+\varphi) \end{bmatrix} = A(\theta+\varphi) \end{aligned}$$

となります.

$A(\theta)$ はベクトルを角度 θ だけ回転させる行列でしたから $A(\theta)$ と $A(\varphi)$ の積はベクトルを φ だけ回転し，次に θ だけ回転させます．したがって $A(\theta)A(\varphi)$ は角度 $\theta+\varphi$ の回転となることがわかります.

L6*. (行列の積) $s \in \mathbb{R}$ を定数とし，$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ を単位行列，$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $R = \begin{bmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ とする．$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ とおく．次を計算せよ.

(1) EA, PA, QA, RA.
(2) AE, AP, AQ, AR.

L7. (逆行列) $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ は $\det A = ad - bc \neq 0$ であるとする．このとき $X = \dfrac{1}{\det A}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ とおくと $AX = E$ かつ $XA = E$ をみたすことを示せ．この行列 X を A^{-1} で表す.

L8. (方程式) $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ は $\det A \neq 0$ とする．ベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}$ に対して，$\boldsymbol{x}$ が方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解であることと $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$ は同値であることを示せ.

L9*. (方程式) 次の方程式を解け.

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$,　　(2) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

L10*. (ケーリー・ハミルトンの等式) $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ とする.

$$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E = O$$

が成り立つことを示せ.

[行列]

例題. (行列の変形) $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ とする.

(1) A の第 1 行に第 2 行の -1 倍を加えてできる行列 A_1 を求めよ.
(2) A_1 の第 2 行に第 1 行の -2 倍を加え，第 3 行に第 1 行の 4 倍を加えてできる行列を求めよ.

解答例. 行列の第 i 行を r_i で表し、第 i 行に第 j 行の s 倍を加えることを $r_i + sr_j$ で表すことにします.

(1) A の第 1 行は $[3 \quad -2 \quad 2]$ であり，A の第 2 行は $[2 \quad -1 \quad 1]$ です．A の第 1 行に第 2 行の -1 倍を加えると

$$[3 \quad -2 \quad 2] + (-1)\,[2 \quad -1 \quad 1] = [1 \quad -1 \quad 1]$$

となるので

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 - r_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & -3 \end{bmatrix} = A_1$$

と変形されます.

(2) 次に A_1 の第 1 行は $[1 \quad -1 \quad 1]$ なので A_1 の第 2 行 $[2 \quad -1 \quad 1]$ に第 1 行の -2 倍，第 3 行 $[-4 \quad 2 \quad -3]$ に第 1 行 $[1 \quad -1 \quad 1]$ の 4 倍を加えると

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{r_2 - 2r_1 \\ r_3 + 4r_1}]{} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

となります.

L11. (行列に関する言葉等)

(1) 第 (x, y) 成分が x を実部，y を虚部とする複素数であるような 3×4 行列 A を書け.
(2) $x \neq 1$ について，A の第 x 行に第 1 行の -1 倍を加えてできる行列を書け.
(3) $y \neq 1$ について，A の第 y 列に第 1 列の $-y$ 倍を加えてできる行列を書け.

L12*. (行列の積) 次の行列のうちから積が定義できるものを (重複を許して) 2 つ選び，それらの積を求めよ (ヒント：7 個ある).

(1) $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

L13*. (行列の積) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 8 & -4 \\ -3 & -6 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ とする．AB と BA を計算せよ.

[正則行列]
例題. (ベクトル分割) A を n 次正方行列とする．A のある列が全て 0 ならば A は正則ではないことを示せ．

解答例. $A = [a_{ij}]$ とします．このとき仮定より，ある j 列が $\begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix} = \boldsymbol{o}$ となっています．したがって全ての k に対して $a_{kj} = 0$ です．もし A が正則とするとある n 次行列 X が存在して

$$XA = E_n = \begin{bmatrix} 1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & 1 \end{bmatrix}$$

とできます．したがって XA の第 (j,j) 成分は 1 です．一方 $X = [x_{ij}]$ とおくと XA の第 (j,j) 成分は，全ての $a_{kj} = 0$ であることから

$$\sum_{k=1}^{n} x_{jk} a_{kj} = x_{j1} a_{1j} + \cdots + x_{jn} a_{nj} = 0$$

となり矛盾します．したがって A は正則ではありません．

このように A のある列が全て 0 であれば A は正則ではありません．一方，全ての $a_{ij} \neq 0$ であっても $A = [a_{ij}]$ が正則とは限りません．

L14*. (行列の相等) A は (m, n) 型の行列とする．B, C は行列で AB, CA は共に単位行列であるとする．

(1) B と C の型はそれぞれ何か．
(2) $B = C$ であることを示せ．

L15*. (正則行列) A, B は全て同じサイズの正方行列とする．次のそれぞれについて正しければ証明し，誤りならば反例を挙げよ．

(1) A, B が正則ならば $A - B$ も正則．
(2) A が正則, B は正則ではないならば $A + B$ は正則．
(3) A が正則, B は正則ではないならば AB は正則ではない．
(4) ある自然数 k が存在して $A^k = O$ ならば A は正則ではない．
(5) ある自然数 k が存在して $A^k = O$ ならば $E - A$ は正則 (ヒント： $E = E - A^k$ を因数分解する)．
(6) ある自然数 k が存在して A^k が正則ならば A は正則

L16*. (対称行列)

(1) X を対称行列，Y を交代行列とする．$Z = X + Y$ に対して ${}^tZ$ を X, Y で表せ．
(2) A を実数を成分とする正方行列とする．このとき対称行列 B と交代行列 C が存在して $A = B + C$ と表されることを示せ．

L17. (トレース) n 次正方行列 $A = [a_{ij}]$ に対して，A の対角成分の和 $a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$ を A のトレースといい，$\operatorname{tr} A$ で表す．A, B を n 次行列, s を定数とするとき，次を示せ．

(1) $\operatorname{tr}(A + B) = \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B$, $\operatorname{tr}(sA) = s(\operatorname{tr} A)$.
(2) $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.
(3) 正則行列 P に対して $\operatorname{tr}(P^{-1}AP) = \operatorname{tr} A$.
(4) $AB - BA = E_n$ をみたす A, B は存在しない．

[行列の区分け]

例題. (行列の区分け) $A=[a_{ij}]$ を $m+n$ 次行列とし，$i \geq m+1$ または $j \leq m$ のとき $a_{ij}=0$ であるとする．自然数 k に対して A^k を求めよ．

解答例. A の $m+1$ 行目以降と m 列目以前にある成分は全て 0 なので，ある $m \times n$ 行列 A_1 で $A=\begin{bmatrix} O_m & A_1 \\ O_{n,m} & O_n \end{bmatrix}$ と対称分割できます．このとき

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{bmatrix} O_m & A_1 \\ O_{n,m} & O_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} O_m & A_1 \\ O_{n,m} & O_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} O_m^2 + A_1 O_{n,m} & O_m A_1 + A_1 O_n \\ O_{n,m} O_m + O_n O_{n,m} & O_m A_1 + O_n^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} O_m & O_{m,n} \\ O_{n,m} & O_n \end{bmatrix} = O_{m+n} \end{aligned}$$

となります．したがって $k=1$ のとき $A^k = A = \begin{bmatrix} O_m & A_1 \\ O_{n,m} & O_n \end{bmatrix}$ であり，$k \geq 2$ のとき

$$A^k = A^2 A^{k-2} = O_{m+n} A^{k-2} = O_{m+n}$$

となります．

L18*. (区分けされた行列の計算) A, B, C, D, X を行列とし，以下では積が定義できるように分割されているとする．次を計算せよ．ただし E は単位行列である．

(1) $\begin{bmatrix} O & E \\ E & O \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$　(2) $\begin{bmatrix} X & O \\ O & E \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} E & X \\ O & E \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$　(4) $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E & X \\ O & E \end{bmatrix}$

L19. (分割された行列) 行列 A を $A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ と分割する．このとき次を示せ．

(1) $A^* = \begin{bmatrix} A_{11}^* & A_{21}^* \\ A_{12}^* & A_{22}^* \end{bmatrix}$

(2) A を正方行列とし，A_{11} と A_{22} は正則，$A_{21}=O$ であるとする．このとき A は正則で，$A^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1} A_{12} A_{22}^{-1} \\ O & A_{22}^{-1} \end{bmatrix}$ である．

L20*. (行列の分割)

(1) $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ とする．A^2, $A\boldsymbol{b}$ を計算せよ．

(2) n を自然数とする．$B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ の n 乗を求めよ．

L21*. (行列の分割) a, b を定数とし，n を自然数とする．次の行列の n 乗を求めよ．

(1) $\begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}$　(2) $\begin{bmatrix} a & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$　(3) $\begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ 6 & -7 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

[基本変形]

例題. (階段行列への変形) 行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -6 \end{bmatrix}$ を行基本変形で単位行列に変形せよ.

解答例. 基本変形の操作は矢印の上下に記号で表します. また基本変形を行う順序は上から順に行うものとします.

以下では基本変形で行う操作を

(1) "$r_i \leftrightarrow r_j$" は第 i 行と第 j 行の入れ換え,

(2) "sr_i" は第 i 行の s 倍,

(3) "$r_i + sr_j$" は第 i 行に第 j 行の s 倍を加える,

と表すことにします.

A を行基本変形します. 列ベクトルが基本ベクトルとなるように左から構成していきます. まず行を入れ替えて $(1,1)$ 成分を 1 にしたあと 1 列目を掃き出します.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{r_2 - 2r_1 \\ r_3 + r_1}]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & 4 & -7 \end{bmatrix}$$

2 行目を -3 で割って $(2,2)$ 成分を 1 にし, 2 列目を掃き出します.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & 4 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow[(-1/3)r_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3 - 4r_2]{r_1 - 2r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$(3,3)$ 成分が 1 になったのでこれを用いて 3 列目を掃き出します.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{r_1 - 3r_3 \\ r_2 + 2r_3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

このように単位行列に変形できます.

L22. (逆変形) 行基本変形

$$(1)\ r_i \leftrightarrow r_j, \quad (2)\ sr_i\ (s \neq 0), \quad (3)\ r_i + sr_j\ (i \neq j)$$

の逆変形を記述せよ.

L23*. (基本変形) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -4 & 5 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ に行基本変形を行い $\begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & * \end{bmatrix}$ の形に変形せよ. どのような変形を行ったのかもちゃんと書くこと.

L24*. (基本変形) 次の行列を単位行列になるまで行基本変形せよ. 変形の途中の行列と変形の操作も例題に倣ってちゃんと書くこと.

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -3 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$

[階段行列]

例題. (階段行列への変形) 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ を階段行列に変形せよ.

解答例. 基本変形は矢印で表します．また<u>変形の手順は矢印の上下に記号で表します</u>．このときの基本変形の順序は<u>上から順に行う</u>ものとします.

A を行基本変形します.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2+r_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3-r_2]{r_1+r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

と階段行列に変形できます．これより $\mathrm{rank}(A) = 2$ であることもわかります.

L25. (基本変形) 次の変形は任意の行列 A に対して基本変形で可能かどうか述べよ．可能の時はどのような基本変形を行えばよいのか書くこと.

(1) 行列 A の第 1 列は $\boldsymbol{o}$ でないとする．A を $\begin{bmatrix} x & * \\ * & * \end{bmatrix}$, $(x \neq 0)$ の形に変形する.

(2) 行列 $A = [a_{ij}]$ が $a_{11} \neq 0$ とする．A を $\begin{bmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \boldsymbol{o} & & * & \end{bmatrix}$ の形に変形する.

(3) 行列 A を $A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \dots & \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix}$ と列ベクトル分割する．このとき A を $\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_3 & \dots & \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix}$ と変形する.

L26*. (階段行列) 次の行列を階段行列に変形し，階数を求めよ.

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \\ 3 & 6 & -5 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & 5 & 9 \\ -1 & 1 & -3 & -5 \end{bmatrix}$

(4) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \\ -2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ (5) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ (6) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

L27*. (階数) (1), (2) を示せ．(3) は計算せよ.

(1) $\mathrm{rank}(A) = 0 \iff A = O$.

(2) $\mathrm{rank}(A) = 1 \iff A \neq O$ で A の零ベクトルではない行ベクトルは互いに平行.

(3) $\boldsymbol{a} = [a_i]$ を m 次元列ベクトル，$\boldsymbol{b} = [b_i]$ を n 次元列ベクトルとし，共に零ベクトルではないとする．$\mathrm{rank}(\boldsymbol{a}\,{}^t\boldsymbol{b})$ を求めよ.

[連立１次方程式]

例題. (連立１次方程式の解) 次の連立１次方程式を解け.

$$\begin{cases} x + \ \ y + \ \ \ z = \ a \\ x + 2y + \ 4z = 2a \\ x + 2y + a^2 z = a^2 \end{cases}$$

解答例. 方程式の係数行列を A, 拡大係数行列を $\widetilde{A}$ として $\widetilde{A}$ を階段行列に変形します. 拡大係数行列に行基本変形を行うと

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & 4 & 2a \\ 1 & 2 & a^2 & a^2 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{r_2-r_1 \\ r_3-r_1}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 3 & a \\ 0 & 1 & a^2-1 & a^2-a \end{array}\right]$$
$$\xrightarrow[r_3-r_2]{r_1-r_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & a \\ 0 & 0 & a^2-4 & a^2-2a \end{array}\right]$$

$a \neq \pm 2$ のとき

$$\widetilde{A} \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & a \\ 0 & 0 & 1 & \frac{a}{a+2} \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{2a}{a+2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{a^2-a}{a+2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{a}{a+2} \end{array}\right]$$

なので解は $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \dfrac{a}{a+2} \begin{bmatrix} 2 \\ a-1 \\ 1 \end{bmatrix}$ です. $a = 2$ のとき

$$\widetilde{A} \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \text{ より } \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})$$

となります. $a = -2$ のとき第３行は $0 = 8$ となりますからこの方程式は解を持ちません.

L28*. (連立１次方程式) 次の連立方程式を基本変形を用いて解け.

(1) $\begin{cases} 2x + 3y - \ z = -1 \\ \ \ x + 4y + 2z = \ \ 2 \\ -x + \ y + 3z = \ \ 3 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 2x + \ y - 3z + 2w = \ \ 1 \\ -x - \ y + \ z + 2w = \ \ 4 \\ \ \ x + 2y \qquad\ \ - 3w = -8 \end{cases}$

L29*. (連立１次方程式) 次の連立方程式を基本変形を用いて解け.

(1) $\begin{cases} x + \ y \qquad\ \ - \ w = 0 \\ x \qquad - 2z + \ w = 0 \\ x + 2y + 2z - 3w = 0 \\ 3x + \ y - 4z + \ w = 0 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x \qquad\ \ - \ z + \ w = \ \ 4 \\ x + 4y + \ z + 2w = -1 \\ 2x - \ y \qquad\ \ - \ w = \ \ 1 \\ -x + 2y - 4z + 2w = \ \ 1 \end{cases}$

L30*. (連立１次方程式) 次の連立１次方程式が解を持つような a の値を求めよ. また, そのときの解を求めよ.

$$\begin{cases} x \qquad\ \ - \ z + (2a+1)w = -a-3 \\ x + \ y + \ z + \ (a-1)w = \qquad 3 \\ x + \ y + 2z + \ (a-2)w = \qquad 6 \\ -x - ay \qquad\ \ + a(a-2)w = \quad -2 \end{cases}$$

[逆行列]

例題. (逆行列) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ -4 & 2 & -3 \\ 7 & -4 & 5 \end{bmatrix}$ が正則かどうか判定し，正則のとき逆行列を求めよ．

解答例. A と E_3 を並べてできる行列 $[A \mid E_3]$ を行基本変形します．このとき

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & -4 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{r_1+r_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 4 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & -4 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[r_3+7r_1]{r_2-4r_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 4 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -14 & -11 & -4 & -3 & 0 \\ 0 & 24 & 19 & 7 & 7 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[r_3+2r_2]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 4 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -14 & -11 & -4 & -3 & 0 \\ 0 & -4 & -3 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{r_2-4r_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 4 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -7 & -4 \\ 0 & -4 & -3 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[r_3+2r_2]{r_1-2r_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 15 & 8 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -7 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -13 & -7 \end{array}\right] \xrightarrow{r_2+r_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 15 & 8 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & -20 & -11 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -13 & -7 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -15 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -10 & -\frac{11}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 13 & 7 \end{array}\right]$$

となります．したがって A は正則で，$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -15 & -8 \\ -1/2 & -10 & -11/2 \\ 1 & 13 & 7 \end{bmatrix}$ となります．

L31*. (逆行列) 次の行列が正則かどうか判定し，正則ならば逆行列を求めよ．

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$　(2) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} 11 & -9 & 9 \\ -14 & 11 & -12 \\ 10 & -5 & 12 \end{bmatrix}$　(4) $\begin{bmatrix} 54 & 45 & 43 & -49 \\ -25 & -21 & -20 & 23 \\ -11 & -9 & -9 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

L32*. (正則判定) 次の行列が正則がどうか判定し，正則ならば逆行列を求めよ．ただし，a, b, c は定数とする．

(1) $\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ a & 1+a^2 & ab+c \\ b & ab+c & 1+b^2+c^2 \end{bmatrix}$　(2) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & a \end{bmatrix}$　(3) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & a \end{bmatrix}$

[階数]

例題. (分割された行列の基本変形) A, B は n 次行列とする．分割された行列 $X = \begin{bmatrix} A & AB \\ O & B \end{bmatrix}$ の階数を $\operatorname{rank} A, \operatorname{rank} B$ で表せ.

解答例. $X = \begin{bmatrix} A & AB \\ O & B \end{bmatrix}$ を基本変形します．行基本変形は<u>左から</u>基本行列を掛けることでした. X に左から行列 $\begin{bmatrix} E_n & -A \\ O & E_n \end{bmatrix}$ を掛けると

$$\begin{bmatrix} E_n & -A \\ O & E_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & AB \\ O & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & AB - AB \\ O & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}$$

となります．したがって

$$\begin{bmatrix} A & AB \\ O & B \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 - Ar_2} \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}$$

と変形できます．いま $a = \operatorname{rank} A$, $b = \operatorname{rank} B$ とします．このとき正則行列 P, Q, R, S が存在して $PAQ = \begin{bmatrix} E_a & O \\ O & O \end{bmatrix}$, $RBS = \begin{bmatrix} E_b & O \\ O & O \end{bmatrix}$ とできます．このとき $\begin{bmatrix} P & O \\ O & R \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} Q & O \\ O & S \end{bmatrix}$ も正則行列であり，したがって基本行列の積で表され,

$$\begin{bmatrix} P & O \\ O & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & O \\ O & S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} PAQ & O \\ O & RBS \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_a & O & O & O \\ O & O & O & O \\ O & O & E_b & O \\ O & O & O & O \end{bmatrix}$$

となります．さらに行及び列の入れ換えを行うことにより，基本変形で

$$\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} E_{a+b} & O \\ O & O \end{bmatrix}$$

とできます．したがって $\operatorname{rank} X = a + b = \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B$ です.

L33. (階数) 次の行列を階数標準形に変形せよ.

(1) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & -7 & 1 & 6 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

L34*. (区分けされた行列の階数) A, B を n 次行列とする．次の行列の階数を $\operatorname{rank} A$, $\operatorname{rank} B$, $\operatorname{rank} BA$ などを用いて表せ.

(1) $\begin{bmatrix} A & -A \\ A & A \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} A & A+B \\ O & B \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} E_n & A \\ O & B \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} A & E_n \\ O & B \end{bmatrix}$

L35*. (階数) A, B を n 次行列とし，$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B = r$ とする．$X = [A\ B]$ を区分けされた $n \times 2n$ 行列とする．次が正しければ証明し，誤りならば反例をあげよ.

(1) $\operatorname{rank}(A+B) \leq r$.
(2) $\operatorname{rank} X \geq r$.
(3) $\operatorname{rank}(AB) = \operatorname{rank}(BA)$.
(4) $\operatorname{rank}(A^2) = r$.

[行列式]

例題. (行列式) 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 5 & -6 \end{vmatrix}$ を計算せよ.

解答例. 3次行列の行列式ですのでサラスの方法を用いて求めることができますが，ここでは基本操作を用いて求めてみましょう.

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 5 & -6 \end{vmatrix} \underset{\substack{r_2-2r_1 \\ r_3+r_1}}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & 6 & -7 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} \overset{\text{次数低下}}{=\!=\!=} 1\begin{vmatrix} 6 & -7 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \underset{2\leftarrow r_2}{=\!=} 2\begin{vmatrix} 6 & -7 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\underset{r_1\leftrightarrow r_2}{=\!=\!=} -2\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 6 & -7 \end{vmatrix} \overset{r_2-6r_1}{=\!=\!=} -2\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \overset{\text{次数低下}}{=\!=\!=} -2\cdot 1\cdot(-1) = 2$$

となります.

もちろん2次行列の行列式になったところで $\begin{vmatrix} 6 & -7 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 6\cdot(-2)-(-7)\cdot 2 = 2$ と計算してもかまいません.

基本変形では<u>行列そのものが変化する</u>ので矢印で変形を表しましたが，行列式の場合は行列が変化しても<u>行列式の値は変化しない</u>ので等号で結びます.

L36*. (順列) 次の順列の転倒数と符号を求めよ.

(1) $\boldsymbol{p}_1 = (2\ 3\ 4\ 1)$　(2) $\boldsymbol{p}_2 = (4\ 3\ 2\ 1)$　(3) $\boldsymbol{p}_3 = (3\ 1\ 2\ 4)$

L37. (順列の積) $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in S_n$ に対して，積 $\boldsymbol{p}\circ\boldsymbol{q}$ を $\boldsymbol{p}\circ\boldsymbol{q}(i) = \boldsymbol{p}(\boldsymbol{q}(i))$ で定め，逆元 $\boldsymbol{p}^{-1}$ を

$$\boldsymbol{p}^{-1}(i) = (\boldsymbol{p}(j) = i \text{ をみたす } j)$$

で定める．$\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3$ は前問の順列とする.

(1) 積 $\boldsymbol{q}_1 = \boldsymbol{p}_1\circ\boldsymbol{p}_2,\ \boldsymbol{q}_2 = \boldsymbol{p}_2\circ\boldsymbol{p}_1$ を計算せよ.
(2) 逆元 $\boldsymbol{q}_3 = \boldsymbol{p}_3^{-1}$ を計算せよ.
(3) $\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \boldsymbol{q}_3$ の符号を求めよ.

L38*. (行列式) 次の行列式を (定義から) 求めよ.

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$　(2) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$　(3) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

L39*. (行列式) 次の行列式を計算せよ.

(1) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 0 & 4 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}$　(2) $\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 \\ d & c & b & a \end{vmatrix}$　(3) $\begin{vmatrix} O_{m,n} & & E_m \\ \begin{matrix} O & & a_1 \\ & \iddots & \\ a_n & & O \end{matrix} & & O_{n,m} \end{vmatrix}$

[行列式とその性質]

例題. (文字を含む行列式) 行列 $A = \begin{bmatrix} -3-x & 8 & 4 \\ -2 & 5-x & 2 \\ 2 & -4 & -1-x \end{bmatrix}$ が正則とならない x を求めよ.

解答例. 正方行列 A が正則でない $\iff$ $\det A = 0$ なので行列式を計算します.

いま 3 次行列なのでサラスの展開公式で計算できますが，最終的に因数分解したいので基本変形で求めます.

$$\begin{vmatrix} -3-x & 8 & 4 \\ -2 & 5-x & 2 \\ 2 & -4 & -1-x \end{vmatrix} \overset{r_1-2r_2}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 1-x & -2+2x & 0 \\ -2 & 5-x & 2 \\ 2 & -4 & -1-x \end{vmatrix}$$

$$\overset{(1-x)\leftarrow r_1}{=\!=\!=\!=} (1-x)\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 5-x & 2 \\ 2 & -4 & -1-x \end{vmatrix} \underset{\substack{r_2+2r_1 \\ r_3-2r_1}}{=\!=\!=} (1-x)\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1-x & 2 \\ 0 & 0 & -1-x \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{次数低下}}{=\!=\!=} (1-x)\begin{vmatrix} 1-x & 2 \\ 0 & -1-x \end{vmatrix} \overset{\text{サラス}}{=\!=\!=} (1-x)^2(-1-x)$$

となります．したがって $x = 1, -1$ のとき A は正則ではありません.

L40*. (行列式の計算) 次の行列式を計算せよ.

(1) $\begin{vmatrix} 9999 & 10000 & 10001 \\ 10001 & 9999 & 10000 \\ 10000 & 10001 & 9999 \end{vmatrix}$　(2) $\begin{vmatrix} c+a & c-a-b & c+b \\ c-a+b & c & c+a-b \\ c-b & c+a+b & c-a \end{vmatrix}$

L41*. (分割された行列の行列式) A, B は n 次行列とする．次の分割された行列の行列式を $|A|$, $|B|$ などを用いて表せ.

(1) $\begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix}$　(2) $\begin{vmatrix} A & AB \\ B & BA \end{vmatrix}$

L42*. (区分けされた行列の行列式) A, B はすべて n 次行列とする．次を示せ.

(1) $\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = |A+B||A-B|$

(2) $\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} = |A+iB||A-iB|$

L43*. (行列式の計算) 行列式 $\begin{vmatrix} a & -a & b & b \\ a & a & -b & b \\ b & b & a & -a \\ -b & b & a & a \end{vmatrix}$ を求めよ.

L44. (区分けされた行列の行列式) $n \geq 2$ として A, B, C, D はすべて n 次行列とする．$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD - CB|$, $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A||D| - |B||C|$ は一般に成立しない．成り立たない例を 1 つ挙げよ.

L45*. (正則判定) 次の行列が正則ではないような a の値を求めよ.

(1) $\begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 1 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & 1 & a \end{bmatrix}$　(2) $\begin{bmatrix} a & -1 & -1 & -1 \\ 1 & a & 1 & -1 \\ 1 & 1 & a & -1 \\ -1 & 1 & 1 & a \end{bmatrix}$

[余因子展開]

例題. (余因子展開) $n+1$ 次行列 A_{n+1} を $A_{n+1} = \begin{bmatrix} x & -1 & & O \\ & \ddots & \ddots & \\ O & & x & -1 \\ a_0 & \dots & a_{n-1} & a_n \end{bmatrix}$ とおく．A_{n+1} の行列式を求めよ．

解答例. $d_{n+1} = \det A_{n+1}$ とおきます．A_{n+1} を第 $n+1$ 列で余因子展開すると

$$d_{n+1} = (-1)^{2n+2} a_n \begin{vmatrix} x & -1 & & O \\ & x & \ddots & \\ & & \ddots & -1 \\ O & & & x \end{vmatrix} + (-1)^{2n+1}(-1) \begin{vmatrix} x & -1 & & O \\ & \ddots & \ddots & \\ & & x & -1 \\ a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \end{vmatrix} = a_n x^n + d_n$$

となります．ここで $d_2 = \begin{vmatrix} x & -1 \\ a_0 & a_1 \end{vmatrix} = a_1 x + a_0$ なので

$$d_{n+1} = a_n x^n + d_n = \cdots = a_n x^n + \cdots + a_2 x^2 + d_2 = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$$

となります．

L46*. (行列式と正則性) $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}$ とする．

(1) A の余因子行列 $\widetilde{A}$ を求めよ．
(2) A が正則となる条件を求めよ．
(3) A が正則のとき，逆行列 A^{-1} を求めよ．

L47. (行列式) 次の行列式を計算せよ．ただし $a \neq 0$ とする．

(1) $\begin{vmatrix} a+\frac{1}{a} & 1 & & O \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ O & & 1 & a+\frac{1}{a} \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$

L48*. (行列式で表される方程式) x に関する次の方程式を解け．

(1) $\begin{vmatrix} 2-x & -1 & -1 \\ -1 & 2-x & -1 \\ -1 & -1 & 2-x \end{vmatrix} = 0$ (2) $\begin{vmatrix} 1-x & 5 & -6 \\ -4 & -8-x & 6 \\ -2 & -5 & 5-x \end{vmatrix} = 0$

L49*. (逆行列) 次の行列の逆行列を余因子行列を用いて求めよ．

(1) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

L50*. (余因子行列) n 次行列 A の成分は全て整数とする．このとき

$$A \text{ が正則行列で，逆行列の成分も全て整数} \iff |A| = \pm 1$$

であることを示せ．

[クラメルの公式]
例題. (クラメルの公式) 次の連立 1 次方程式を解け.

$$\begin{cases} 4x + 5y = 3 \\ 5x + 8y = 4 \end{cases}$$

解答例. $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$ とし，$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ とします．また $A = [\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2]$ と列ベクトル分割します．

いま $\det A = 32 - 25 = 7$ なので A は正則です．したがってクラメルの公式より，この解 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ は

$$x = \frac{\det(\boldsymbol{b}\ \boldsymbol{a}_2)}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}}{7} = \frac{4}{7}, \quad y = \frac{\det(\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{b})}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}}{7} = \frac{1}{7}$$

となります．したがって $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \dfrac{1}{7}\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ です．

L51*. (クラメルの公式) 次の連立 1 次方程式をクラメルの公式を用いて解け.

(1) $\begin{cases} x - 3y + 2z = 1 \\ 5x + 10y - 9z = 2 \\ 7x - y - z = 7 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x + 7y - 5z = 2 \\ 10x + 2y - 3z = -2 \\ 14x - 2y - z = -4 \end{cases}$

L52*. (連立 1 次方程式) c を定数とする．次の連立 1 次方程式の解を求めよ.

(1) $\begin{cases} (1-c)x + y + z = 0 \\ x + (1-c)y - z = 0 \\ x - y - (1+c)z = 0 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x + cz = 0 \\ x + (1+c)y + 2z = 0 \\ cx + y + (2+c)z = 0 \end{cases}$

L53*. (連立 1 次方程式の応用) 次の方程式をみたす行列 X を (行基本変形して) 求めよ.

(1) $\begin{bmatrix} -3 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & -9 & -2 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 9 & -5 & -4 \\ 7 & -1 & 4 \\ -20 & 7 & -1 \end{bmatrix}$

(2) $\begin{bmatrix} -6 & 10 & 2 \\ 1 & 5 & -7 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 12 & -20 \\ -2 & 10 \end{bmatrix}$

L54. (外積) $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^3$ に対して，次の等式を示せ.

(1) $((\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}), \boldsymbol{z}) = ((\boldsymbol{y} \times \boldsymbol{z}), \boldsymbol{x}) = ((\boldsymbol{z} \times \boldsymbol{x}), \boldsymbol{y})$
(2) $(\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}) \times \boldsymbol{z} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})\boldsymbol{y} - (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})\boldsymbol{x}$
(3) $(\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}) \times \boldsymbol{z} + (\boldsymbol{y} \times \boldsymbol{z}) \times \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{z} \times \boldsymbol{x}) \times \boldsymbol{y} = 0$